

Capítulo 5 - Movimento Vibratório e Ondulatório

Dos movimentos encontrados na natureza, um dos mais importantes é o movimento oscilatório (ou vibratório). Uma partícula tem oscilação quando se move periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio. O movimento de um pêndulo é oscilatório. Um peso amarrado na extremidade de uma mola esticada, oscila ao ser abandonado. Os átomos num sólido estão em vibração. Os electrões, numa antena transmissora ou receptora, executam rápidas oscilações. A compreensão do movimento vibratório é fundamental para a compreensão de fenómenos ondulatórios.

5.1 Oscilador harmónico a uma dimensão

De todos os movimentos oscilatórios, o mais importante é o *movimento harmónico simples* (MHS), porque, além de ser o movimento mais simples para se descrever matematicamente, constitui uma descrição bastante precisa de muitas oscilações encontradas na natureza.

5.2 Cinemática do Movimento Harmónico Simples

5.2.1 Amplitude, Fase inicial, Período e Frequência Angular

Por definição, dizemos que uma partícula executa um movimento harmónico simples ao longo do eixo X (por exemplo) quando o seu deslocamento (elongação) x em relação à origem do sistema de coordenadas, é dado, como função do tempo, pela relação;

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{m}) \quad (5.1)$$

A grandeza $\omega t + \varphi_0$ é denominada fase, com φ_0 a *fase inicial* - o valor da fase para $t = 0$ s. O movimento harmónico simples é aqui expresso em termos da função sin, mas poderíamos ter utilizado a função cos (ambas são funções sinusoidais), sendo que a única diferença é uma diferença de $\pi/2$ na fase inicial. Como a função sin (e cos) varia entre -1 a +1, o deslocamento da partícula varia entre $x = -A$ (m) e $x = +A$ (m). A *elongação máxima*, A , em relação à origem, é a *amplitude do movimento* harmónico simples. A função sin repete-se cada vez que o ângulo varia de 2π . Logo, o deslocamento da partícula repete-se após um intervalo de tempo de $2\pi/\omega$. Portanto o movimento harmónico simples é periódico, de *período* $T = 2\pi/\omega$ (em s). A *frequência* f de um movimento harmónico simples é igual ao número de oscilações, por unidade de tempo; assim, $f = 1/T$ (Hz ou s^{-1}).

A grandeza ω denominada *frequência angular* (ou *velocidade angular*) da partícula oscilante, está relacionada com a frequência pela seguinte expressão (semelhante para o movimento circular);

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{rad s}^{-1}) \quad (5.2)$$

A velocidade da partícula, virá;

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{m s}^{-1}) \quad (5.3)$$

Analogamente, a aceleração é descrita por;

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{m s}^{-2}) \quad (5.4)$$

e mostra que, num movimento harmónico simples (MHS), a aceleração é sempre proporcional e de sentido oposto ao deslocamento. Na figura 5.1 são apresentados os gráficos de x , v , e a em função do tempo.

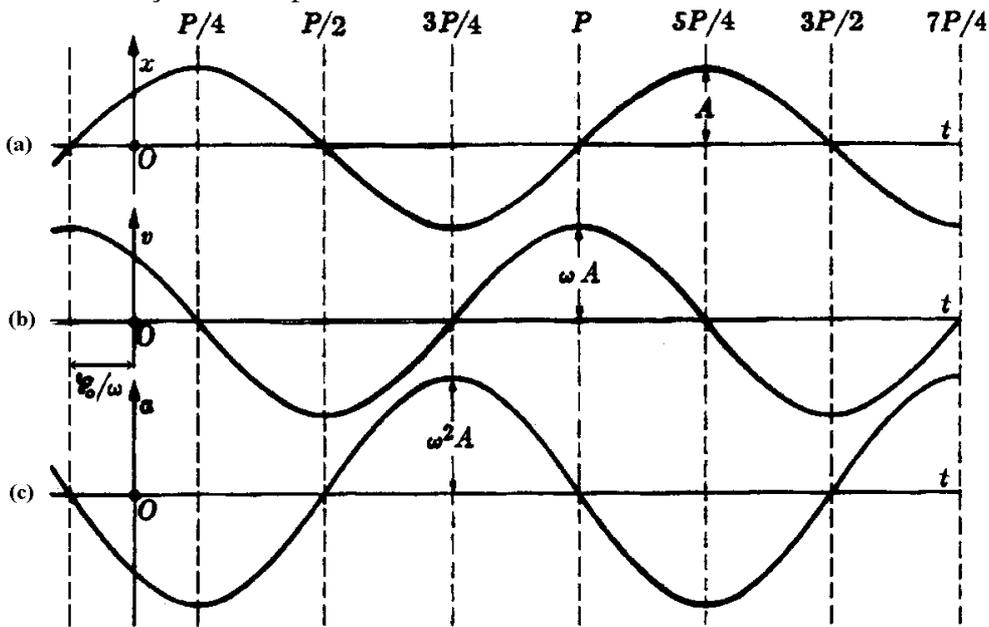


Figura 5.1 - Gráficos do deslocamento (x), da velocidade (v) e da aceleração (a) em função do tempo, no M.H.S.

O deslocamento da partícula, que se move com MHS, pode ser considerado como a componente X de um *vector girante* $\overline{OP'}$, com $\overline{OP'} = A$, que gira no sentido directo (anti-horário), em torno de O , com velocidade angular ω e que faz (em cada instante) um ângulo $\omega t + \varphi_0$, também medido no sentido directo, com o eixo negativo do Y . Na figura 5.2, está representado o vector $\overline{OP'}$ em varias posições sucessivas ((a), (b) e (c)). Podemos verificar, que a qualquer instante, a componente x de $\overline{OP'}$ é $x = \overline{OP'} \sin(\omega t + \varphi_0)$.

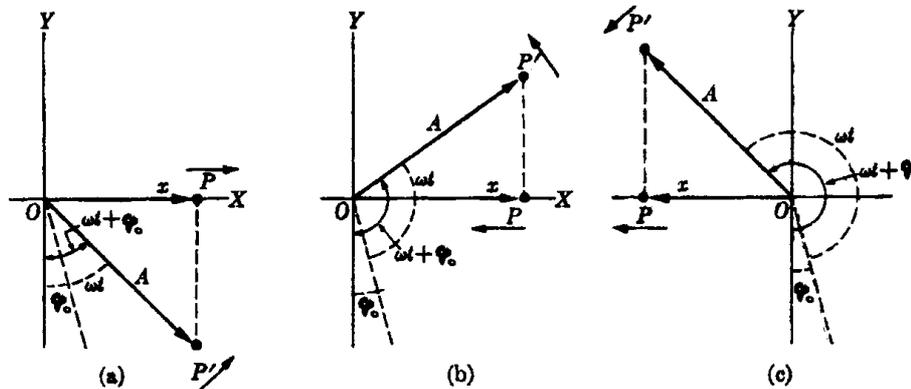


Figura 5.2 - Vector girante para o deslocamento, no M.H.S.

A *velocidade* e *aceleração* da partícula também podem ser representadas por **vectores girantes** $\overline{OV'}$ e $\overline{OA'}$, cujos comprimentos são, respectivamente, ωA e $\omega^2 A$ e cujas componentes projectadas ao longo do eixo X dão a velocidade v e a aceleração a da partícula que se move com M.H.S.. Pode-se ver que $\overline{OV'}$ e $\overline{OA'}$ estão, respectivamente, adiantados de $\pi/2$ e π , em relação ao vector girante $\overline{OP'}$.

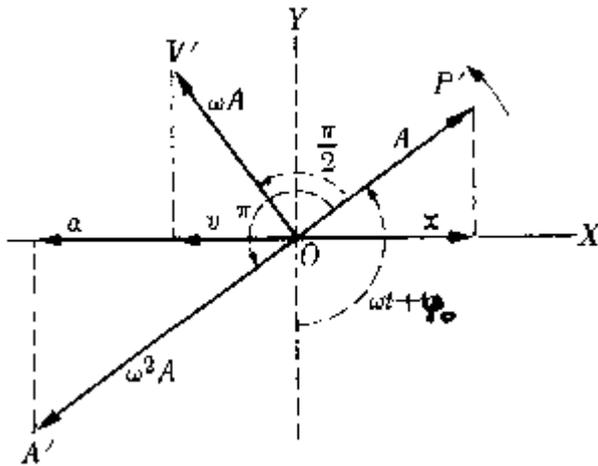


Figura 5.3 - Representação simultânea dos vectores girantes para o deslocamento (x), velocidade (v) e aceleração (a) no M.H.S..

5.2.2 Força e Energia no Movimento Harmónico Simples

Da expressão da aceleração no M.H.S.;

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t) \quad (5.5)$$

podemos obter a força que actua sobre uma partícula de massa m para que esta oscile com movimento harmónico simples. Aplicando a equação fundamental da dinâmica $F = ma$, e substituindo a aceleração, temos:

$$F = -m\omega^2 x = -kx \quad (5.6)$$

onde colocamos,

$$k = m\omega^2 \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad (5.7)$$

Este resultado indica que num movimento harmónico simples, a força é proporcional e de sentido contrário ao deslocamento. Assim, o vector força aponta sempre para a origem O , (mas esse é o ponto de equilíbrio, pois, na origem, $F = 0$ N, porque $x = 0$ m). Também podemos dizer (considerar) que a força F é atractiva e o centro de atracção é o ponto O . Esta força é o tipo de força que aparece quando se deforma um corpo elástico como, por exemplo, uma mola. A constante $k = m\omega^2$, às vezes chamada *constante elástica*, representa a força necessária para deslocar a partícula de uma distância unitária (o aluno deve aqui reconhecer a famosa lei de Hooke).

Podemos agora extrair as expressões:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.8)$$

que nos dão, respectivamente o período e a frequência de um movimento harmónico simples em função de m - massa da partícula e k - constante elástica da força aplicada.

A energia cinética da partícula é:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad (5.9)$$

mas da igualdade trigonométrica ($\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$) temos,

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \quad (J) \quad (5.10)$$

Notemos que a *energia cinética é máxima no centro* ($x = 0$ m) e *nula nos extremos de oscilação* ($x = \pm A$ m).

Para obter a energia potencial (lembremo-nos do capítulo 4) que $F = -dE_p/dx$, vindo;

$$dE_p/dx = kx \quad (5.11)$$

Integrando (escolhendo o zero da energia potencial na origem), obtemos;

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kx dx \quad \text{ou} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (5.12)$$

Portanto a *energia potencial é mínima (nula) no centro* ($x = 0$ m) e *aumenta à medida que a partícula se aproxima dos extremos de oscilação* ($x = \pm A$ m). Somando ambas as energias (cinética e potencial), obtemos, para a energia total do oscilador harmónico simples;

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (5.13)$$

que é um valor constante (este resultado era de se esperar, pois a força é conservativa). Podemos portanto dizer que, durante uma oscilação, há uma troca contínua de energias cinética e potencial. Quando a partícula se afasta da posição de equilíbrio, a energia potencial aumenta, enquanto que a cinética diminui; o inverso ocorre quando a partícula se aproxima da posição de equilíbrio.

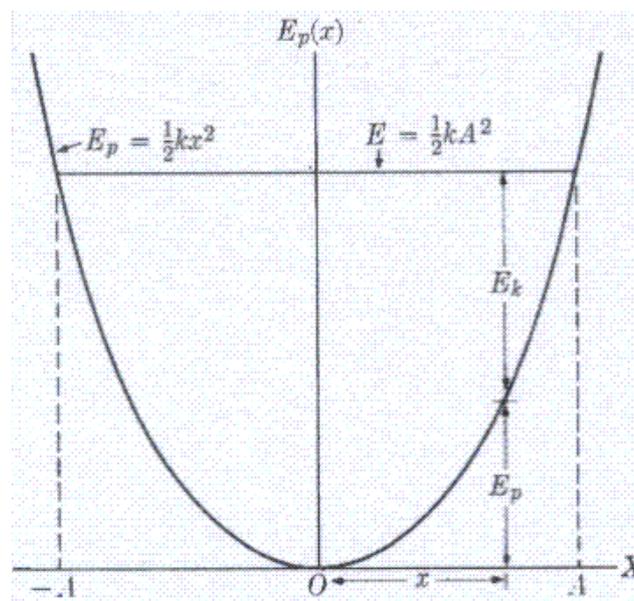


Figura 5.4 - Representação da relação entre as energias no M.H.S..

A figura 6.4 mostra a energia potencial, $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ representada por uma parábola. Para uma dada energia total E , representada pela linha horizontal, os limites de oscilação são determinados pelas interseções dessa horizontal com a curva da energia potencial. Como a parábola E_p é simétrica, os limites de oscilação estão a distâncias iguais, $\pm A$, de O. Para qualquer ponto x , a energia cinética E_c é dada pela distância entre a curva $E_p(x)$ e a linha E .

5.3 Dinâmica do Movimento Harmónico Simples

Vamos agora discutir o problema inverso: provaremos que, dada uma força atrativa proporcional ao movimento (isto é, $F = -kx$), o movimento resultante é harmónico simples.

Um procedimento é partir da equação de movimento, $F = ma$, com $F = -kx$ e, lembrando que no movimento rectilíneo $a = d^2x/dt^2$, escrever a equação;

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{ou} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (5.14)$$

com, $\omega^2 = k/m$, podemos escrever;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (5.15)$$

Esta expressão é uma equação diferencial cujas soluções são funções sinusoidais de ωt . Substituindo x por $A \sin(\omega t + \varphi_0)$, podemos verificar directamente que essa expressão para x , que corresponde ao movimento harmónico simples, satisfaz a equação acima. Logo, dizemos que $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, é a solução geral da equação diferencial, porque tem duas constantes arbitrárias, a amplitude A e a fase inicial φ_0 . Portanto verificamos que *uma força atractiva proporcional ao deslocamento produz movimento harmónico simples*.

Esta equação aparece em muitas situações na física. Sempre que ela aparece, o fenómeno correspondente é oscilatório e obedece à lei $A \sin(\omega t + \varphi_0)$, sendo que ela pode estar descrevendo um deslocamento linear ou angular de uma partícula, uma corrente num circuito eléctrico, a concentração de iões num plasma, a temperatura de um corpo ou inúmeras outras situações físicas.

Exemplo: discutir a solução da equação diferencial para o movimento harmónico simples em termos do deslocamento inicial x_0 e da velocidade inicial v_0 .

A solução geral é: $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, logo $x_0 = A \sin(\varphi_0)$ e $v_0 = A \omega \cos(\varphi_0)$

de onde; $\operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{\omega x_0}{v_0}$ e $A = (x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2})^{1/2}$

Por exemplo, se a partícula está inicialmente na posição de equilíbrio $x_0 = 0$ e recebe um impulso que lhe imprime uma velocidade v_0 , temos $\varphi_0 = 0$ e $A = v_0/\omega$.

Por outro lado, se a partícula é afastada de uma distância x_0 da posição de equilíbrio e, em seguida, abandonada, temos $v_0 = 0$, e, portanto, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \infty$ ou $\varphi_0 = \pi/2$ e $A = x_0$.

5.4 Movimento de um pêndulo

5.4.1 Pêndulo Gravítico Simples

Um exemplo de movimento harmônico simples é o movimento de um pêndulo (dito gravítico). Um pêndulo simples é definido como uma partícula de massa m ligada, num ponto O , por um fio de comprimento l e massa desprezível (figura 5.5). Se a partícula for afastada lateralmente até a posição B , onde o fio faz um ângulo θ_0 com a vertical OC , e, em seguida, abandonada, o pêndulo oscilará entre B e a posição simétrica B' .

Para determinar o tipo de oscilação observado, precisamos escrever a equação de movimento da partícula. A partícula move-se num arco de círculo com raio $l = OA$. As forças que agem sobre a partícula são o peso $m\vec{g}$ e a tensão \vec{T} no fio. A componente tangencial da força resultante é, pela figura 5.5;

$$F_T = -mg \operatorname{sen} \theta \quad (5.16)$$

(o sinal negativo aparece porque considerámos um referencial positivo para a direita).

A equação para o movimento tangencial é $F_T = ma_T$, e como a partícula se move ao longo de um círculo de raio l (constante), podemos exprimir a aceleração tangencial como :

$$a_T = l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (5.17)$$

A equação para o movimento tangencial é, portanto;

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen} \theta \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (5.18)$$

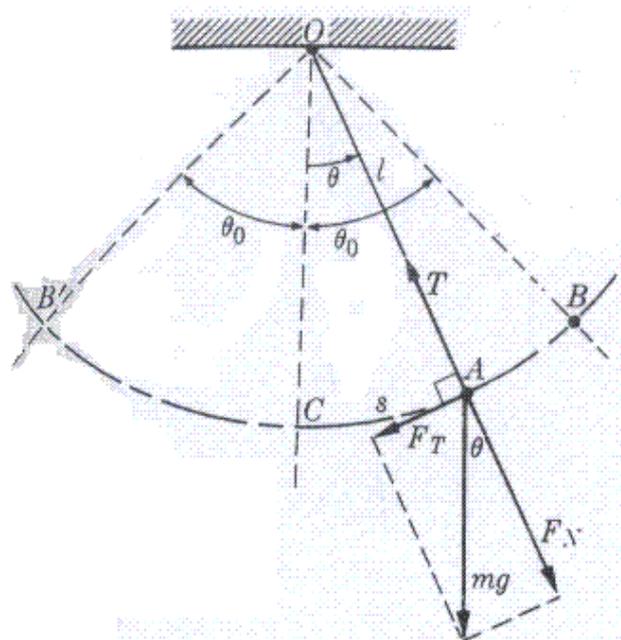


Figura 5.5 - Movimento oscilatório de um pêndulo.

Essa equação não é do mesmo tipo da encontrada anteriormente (expressão 5.15) devido à presença de $\sin \theta$. Entretanto, se o ângulo θ é pequeno, o que é verdadeiro para pequenas amplitudes de oscilação, podemos usar a aproximação e escrever $\sin \theta \approx \theta$ para o movimento do pêndulo que, então se reduz a;

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (5.19)$$

Essa equação diferencial é já idêntica à anteriormente descrita, com x foi substituído por θ , sendo que, desta forma, ela se refere a um movimento angular e não linear. Assim, concluímos que, dentro de nossa aproximação, o movimento angular do pêndulo é harmónico simples, com $\omega^2 = g/l$. O ângulo θ pode ser, desse modo expresso na forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{rad}) \quad (5.20)$$

Podemos escrever o período de oscilação como;

$$T = 2\pi/\omega \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.21)$$

Vemos assim, que o período é independente da massa do pêndulo. Para amplitude maiores, a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ não é válida. Nesse caso a fórmula para o período depende da amplitude θ_0 .

A fórmula geral para o período, vem expressa sob a forma de uma série,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\theta_0 + \frac{9}{64}\sin^4\frac{1}{2}\theta_0 + \dots\right) \quad (\text{s}) \quad (5.22)$$

A variação de T com a amplitude θ_0 , expressa em termos do período $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ correspondente a amplitudes muito pequenas, está ilustrado na figura 5.6. De notar que somente para amplitudes muito grandes é que o período difere apreciavelmente de T_0 . Para pequenas amplitudes, é suficiente tomar apenas o primeiro termo de correcção; e podemos ainda fazer a substituição de $\sin\frac{1}{2}\theta_0$ por $\frac{1}{2}\theta_0$, vindo como resultado;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2\right) \quad (5.23)$$

onde θ_0 deve vir expresso em radianos. Essa é uma aproximação suficiente para a maioria das situações práticas. De facto, o termo de correcção $\frac{\theta_0^2}{16}$ contribui com menos de 1 % para o valor total do período, nas oscilações menores que 23° .

[Nota: a notação de período pode ser T (de Time) ou por vezes P (de Período), consoante a fonte bibliográfica considerada]

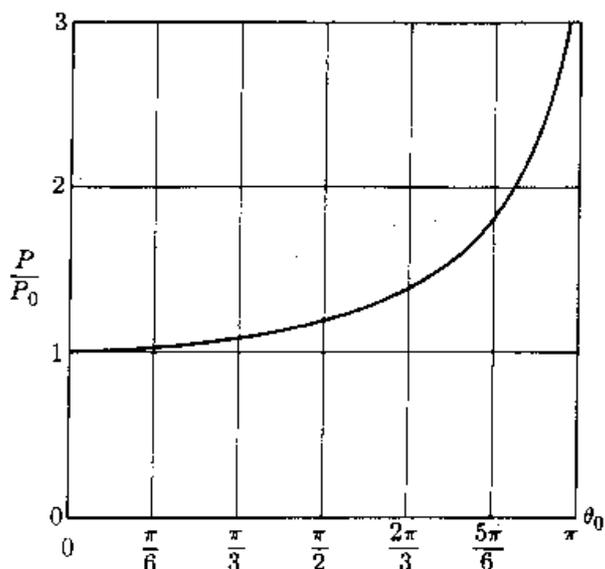


Figura 5.6 - Variação do período de um pêndulo com a amplitude de oscilação.

(Há, entretanto, um sistema especial em que o período de um pêndulo é independente da amplitude. É o *pêndulo cicloidal*. **Ciclóide** é uma curva gerada por um ponto na borda de um disco que rola num plano. Se construirmos, num plano vertical, uma trajetória com a forma de uma ciclóide e deixarmos uma massa m deslizar ao longo dela, num movimento oscilatório, sob a acção da gravidade, a amplitude do movimento dependerá do ponto em que a partícula for abandonada, mas o período será sempre $T = 4\pi\sqrt{a/g}$, onde a é o raio do círculo que gera a ciclóide.)

5.5 Princípio da Sobreposição

5.5.1 Sobreposição de dois M H S: mesma direcção e mesma frequência

Consideraremos agora a sobreposição (interferência) de dois movimentos harmónicos simples que dão o deslocamento da partícula ao longo de uma mesma recta. Veremos inicialmente o caso em que ambos têm a mesma frequência (figura 5.7). O deslocamento da partícula, produzido por cada movimento harmónico simples, é dado por.

$$x_1(t) = OP_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \quad \text{e} \quad x_2(t) = OP_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (5.24)$$

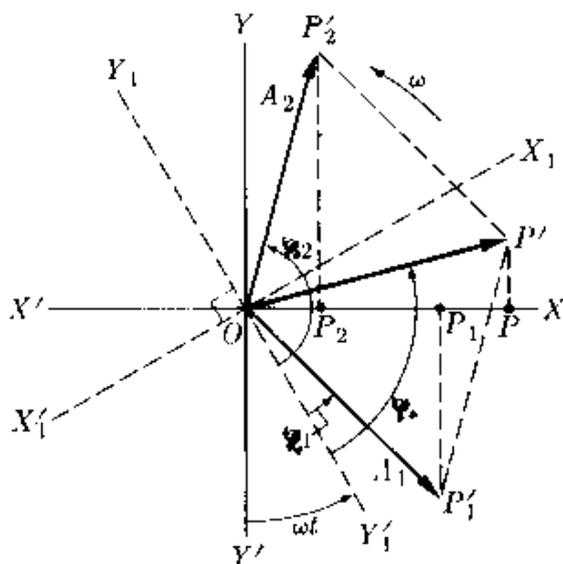


Figura 5.7 - Composição de dois MHS de igual frequência e direcção de vibração.

O deslocamento resultante da partícula é dado por:

$$x = OP = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (5.25)$$

Provaremos que x também corresponde a um movimento harmónico simples com a mesma frequência. Observamos que a componente X do vector OP' , soma dos vectores girantes OP'_1 e OP'_2 , é justamente a soma das componentes X de OP'_1 e OP'_2 , (isto é, $x_1 + x_2$) e portanto, é igual a x . Além disso, como o ângulo entre OP'_1 e OP'_2 tem um valor fixo $\delta = \varphi_{02} - \varphi_{01}$, o vector OP' tem módulo constante A , e gira também em torno de O com a mesma velocidade angular ω . Portanto o vector girante OP' gera um movimento harmónico simples de frequência angular ω e podemos escrever, então, para $x = OP$,

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{A amplitude } A, \text{ é: } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta} \quad (5.26)$$

A fase inicial φ_0 pode ser determinada se projectarmos os três vectores sobre os eixos OX_1 e OY_1 , que giram com velocidade angular ω e constituem um sistema de referência em que os vectores OP'_1 , OP'_2 e OP' estão em repouso. Então, pela lei da adição vectorial, temos;

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \quad \text{e} \quad A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 \quad (5.27)$$

Dividindo membro a membro, obtemos:

$$\text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (5.28)$$

Consideremos alguns casos especiais importantes

Se $\varphi_{02} = \varphi_{01}$, então, $\delta = 0$ e dizemos que os dois movimentos estão **em fase**. Seus vectores girantes são paralelos e temos;

$$A = A_1 + A_2 \quad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \quad (5.29)$$

Logo, os dois movimentos harmónicos simples interferem construtivamente porque as suas amplitudes se somam, como podemos ver na figura 5.8.

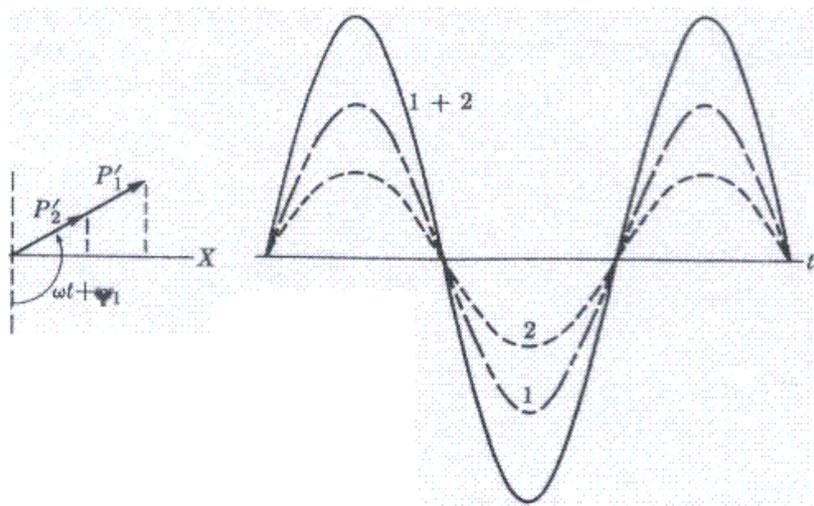


Figura 5.8 - Composição de dois MHS em fase.

Se $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \pi$, então, $\delta = \pi$, e dizemos que os dois movimentos harmônicos simples estão **em oposição de fase**. Seus vectores girantes são antiparalelos e se $A_1 > A_2$,

$$A = A_1 - A_2 \quad \varphi = \varphi_1 \quad (5.30)$$

e os dois movimentos harmônicos simples interferem **destrutivamente**, pois as suas amplitudes se subtraem, como ilustrado na figura 5.9. Em particular, se $A_1 = A_2$, os dois movimentos harmônicos simples cancelam-se de maneira completa. (O que aconteceria se $A_1 < A_2$?)

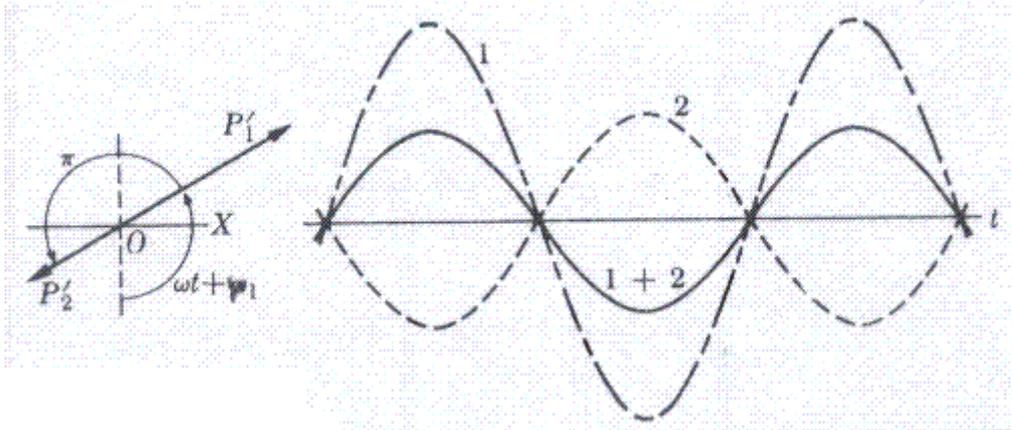


Figura 5.9 - Composição de dois MHS em **oposição de fase**.

Se $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \pi/2$, então, $\delta = \pi/2$, e dizemos que os dois movimentos harmônicos simples estão **em quadratura**. Então;

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (5.31)$$

e a fase inicial virá dada por:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \arctg \frac{A_2}{A_1} \quad (5.32)$$

Nesse caso, os dois vectores girantes são perpendiculares. Na figura 5.10, está ilustrado o caso em que $A_1 = A_2 \sqrt{3}$ de modo que $\varphi_0 = \varphi_{01} + \pi/6$ e $A = 2A_2$.

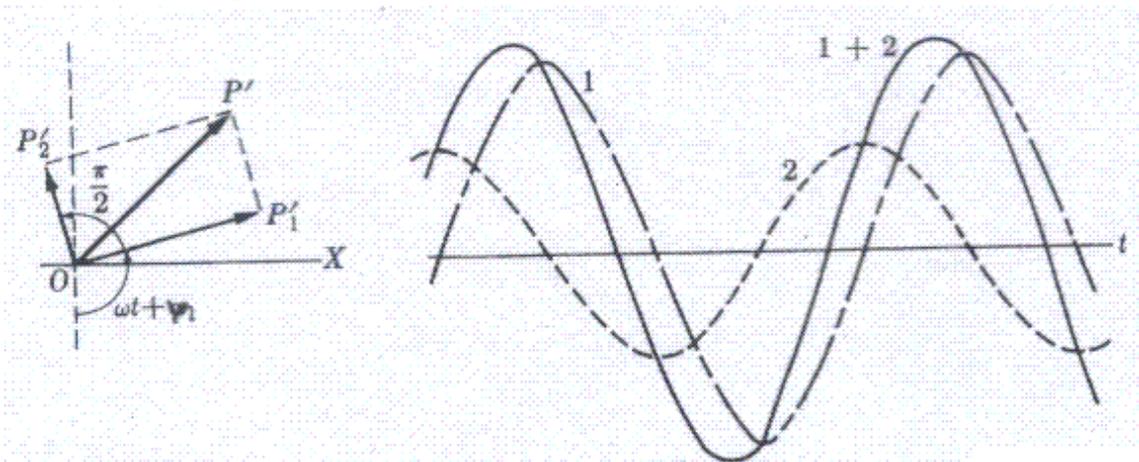


Figura 5.10 - Composição de dois MHS em quadratura de fase.

5.5.2 Sobreposição de dois MHS: mesma direcção, frequências diferentes

O caso em que dois movimentos harmónicos simples, que interferem, têm a mesma direcção e frequências diferentes é também importante. Consideremos, para simplificar, o caso em que $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = 0$; os movimentos são, então, descritos pelas equações;

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t) \quad (5.33)$$

O ângulo entre os vectores girantes OP'_2 e OP'_1 é $\omega_1 t - \omega_2 t = (\omega_1 - \omega_2)t$ e não é constante. Portanto o vector resultante OP' não tem módulo constante e não gira com uma velocidade angular constante. Consequentemente, o movimento resultante $x = x_1 + x_2$, não é harmónico simples. Entretanto, como vemos pela figura 5.11, a "amplitude" do movimento é;

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \quad (5.34)$$

e "oscila" entre os valores $A = A_1 + A_2$ [quando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$] e $A = |A_1 - A_2|$ [quando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$]. Diz-se, então, que a amplitude *é modulada*. A frequência de oscilação da amplitude é expressa por:

$$f = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2 \quad (5.35)$$

igual à diferença entre as frequências dos dois movimentos que interferem.

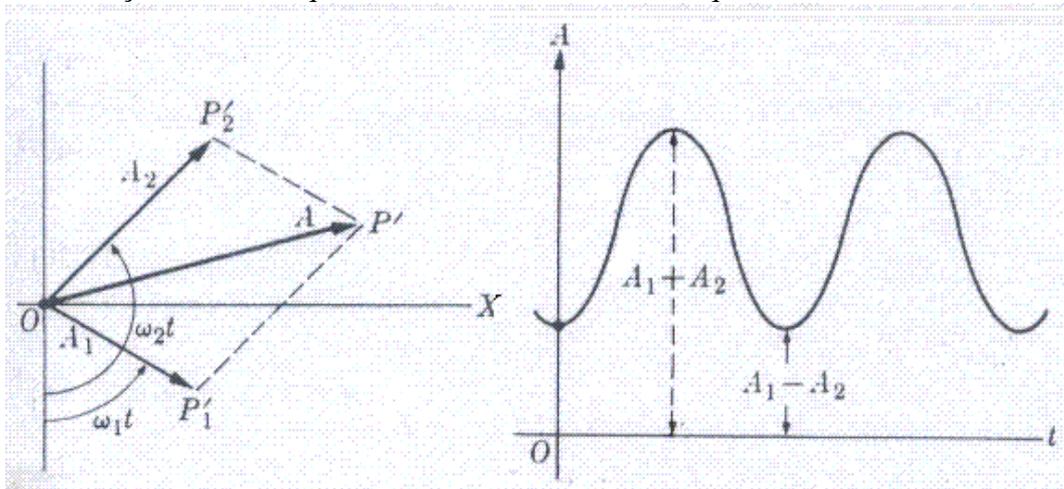


Figura 5.11 - Composição de dois MHS de frequências distintas.

A figura 5.11 mostra a variação de A com t . A situação descrita ocorre, por exemplo, quando dois diapasones de frequências próximas, mas distintas, vibram simultaneamente próximos um do outro. Observa-se uma flutuação na intensidade do som, chamada *batimento*, que é devida à variação da amplitude.

Uma situação interessante ocorre quando $A_1 = A_2$, isto é, quando as amplitudes são iguais. Nesse caso, temos;

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) = \\ &= 2A_1 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right) \text{sen}\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

indicando que o movimento é oscilatório, de frequência angular $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ e amplitude $A = 2A_1 \cos(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t)$. O gráfico de x em função de t é ilustrado pela figura 5.12, em que a linha a tracejado mostra a modulação da amplitude (envelope a envolver o nosso sinal).

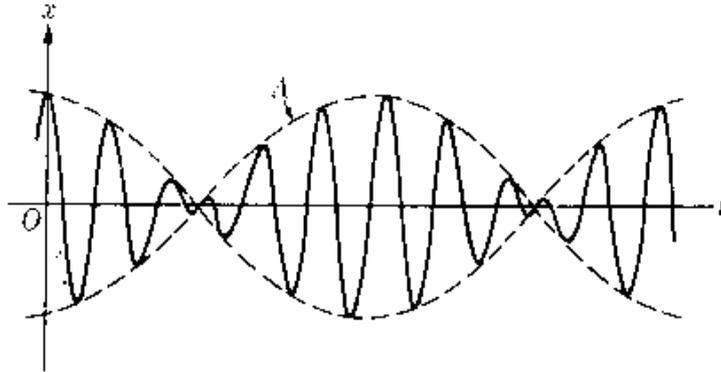


Figura 5.12 - Batimentos no caso em que as duas amplitudes são iguais.

5.5.3 Sobreposição de dois MHS: direcções ortogonais

Consideremos o caso de uma partícula sujeita a dois MHS, mas perpendiculares entre si. Podemos considerar o movimento na direcção X como $x(t) = A \sin(\omega_x t)$ e o movimento na direcção Y como $y(t) = B \sin(\omega_y t + \delta)$. As posições sucessivas ao longo do tempo que a partícula irá ocupar, estarão confinadas ao plano XY, entre $-A$ e $+A$ em X e $-B$ e $+B$ em Y. A trajectória observada será função da razão entre as frequências angulares ω_x e ω_y e da diferença de fase δ . A forma é também condicionada pelas amplitudes A e B . As figuras resultantes, que representam as trajectórias são conhecidas como figuras de *Lissajous*, (figuras 5.13 e 5.14).

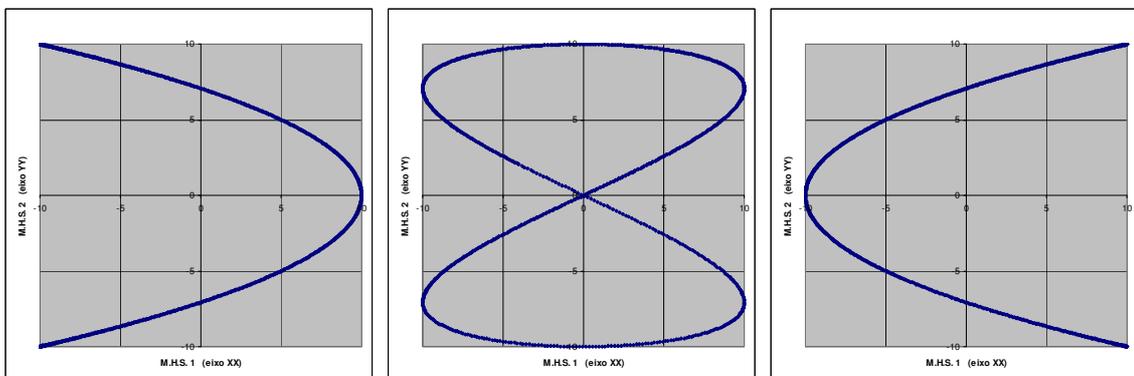


Figura 5.13 – Figuras de *Lissajous* - igual amplitude, razão de frequências $\omega_x / \omega_y = 2$ e $\delta = 0, \pi/2$ e π (respectivamente da esquerda para a direita).

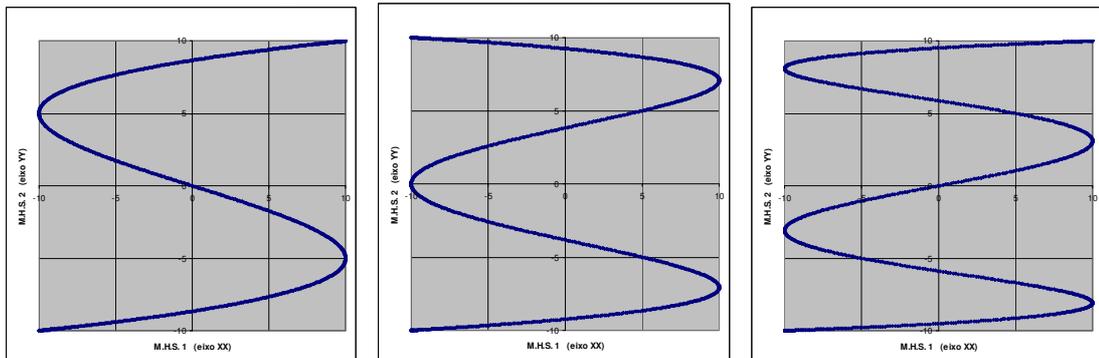


Figura 5.14 – Figuras de *Lissajous* - igual amplitude, $\delta = 0$ e razão de frequências $\omega_x / \omega_y = 3, 4$ e 5 (respectivamente da esquerda para a direita).

5.6 Oscilador harmónico amortecido. Coeficiente de amortecimento

O oscilador que estudamos até agora não sofre qualquer tipo de atrito, e mantém a sua energia total inalterável. Mas o que acontece se existir uma força de atrito aplicado no oscilador? O trabalho realizado pela força de atrito irá dissipar/fazer diminuir a energia deste e observaremos um movimento com cada vez menos energia disponível, ou seja teremos um oscilador dito amortecido. A força de atrito responsável por essa dissipação de energia pode ser devida ao atrito entre um corpo (ligado a uma mola) e o plano sobre o qual assenta ou quando se considera a força de atrito do ar com o pêndulo simples gravítico.

As forças de atrito são geralmente proporcionais à velocidade. Logo, em vez da expressão (5.14) teremos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5.37)$$

pois a nossa força de atrito é dada por:

$$F_a = -\lambda v = -\lambda \frac{dx}{dt} \quad (5.38)$$

com λ a nossa constante de atrito.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.39)$$

onde $\gamma = \frac{\lambda}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ γ é a constante de amortecimento do movimento.

Se não houver a força elástica de restauração, a expressão (5.39) virá:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = 0 \quad (5.40)$$

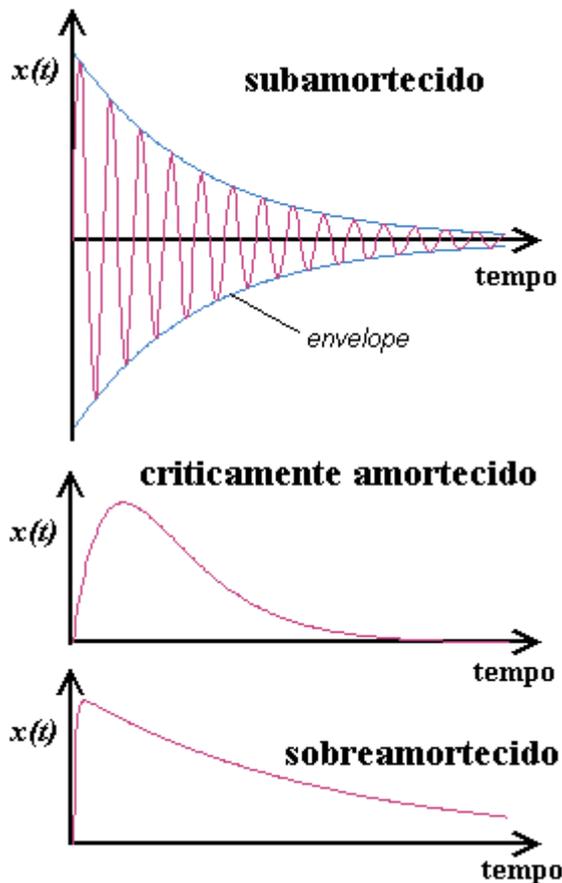
cuja solução é da forma $x(t) = C_0 e^{-\gamma t/2}$, onde C_0 é a constante que depende da posição e velocidade inicial do sistema. Ou seja, a massa em oscilação irá parar e vai fazê-lo com uma taxa de desaceleração exponencial. Sem a força de atrito o movimento é oscilatório, com frequência própria (ou natural) ω_0 , como já vimos anteriormente. Então não será difícil pensar que no caso do movimento oscilatório amortecido, ele deve ter uma solução intermédia, uma “mistura” das duas soluções – uma oscilação amortecida, onde a velocidade angular deve estar um pouco modificada pela existência do atrito na oscilação.

A solução (que não vamos deduzir, mas que o aluno pode comprovar) é da seguinte forma:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t/2} \sin(\omega' t + \varphi_0) \quad (5.41)$$

onde a nova frequência angular (ω'), vem

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (5.42)$$



Vamos analisar as três situações possíveis, dependendo se $\gamma^2/4$ é menor, igual, ou maior do que ω_0^2 .

O caso de **subamortecido** em que $\gamma^2/4 < \omega_0^2$.

Neste caso, a oscilação repete-se durante vários ciclos e a amplitude das oscilações vai diminuindo no tempo. A amplitude decrescente da oscilação é envolvida por uma banda - chamada de *envelope*, dada por $\pm A_0 e^{-\gamma t/2}$.

O caso de **amortecimento crítico** em que $\omega_0^2 = \gamma^2/4$.

Neste caso, não temos uma oscilação completa, antes de a oscilação se completar a massa pára. Vemos isto na figura 5.15, onde a massa começa da posição de equilíbrio, alcança uma distância máxima, e volta, parando na posição de equilíbrio depois de um determinado intervalo de tempo.

O caso de **sobreamortecido** em que $\gamma^2/4 > \omega_0^2$.

Neste caso, a massa nem alcança a posição de equilíbrio num tempo finito. A distância diminui exponencialmente no tempo.

Figura 5.15 – Oscilador amortecido – as 3 soluções.

5.7 Oscilador harmónico forçado. Frequência de ressonância

Podemos também forçar um oscilador a oscilar. Por exemplo, quando aplicamos uma força periódica a uma criança num balanço de jardim, pois queremos que as oscilações continuem. A força mais fácil de se tratar matematicamente (e de aplicar) é uma força periódica na forma:

$$F = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.43)$$

e portanto sinusoidal.

Somando todas as forças do oscilador, incluindo a força de atrito e a força aplicada, a equação torna-se então:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos(\omega t) \quad (5.44)$$

Na solução, a oscilação “deverá” ter a mesma frequência que a da força aplicada.

A solução da expressão anterior (5.44) é a seguinte:

$$x(t) = x_m \cos(\omega' t + \varphi_0) \quad (5.45)$$

com:

$$x_m = \frac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2 \right]^{1/2}} \quad (5.46)$$

e

$$\varphi_0 = \text{arctg} \left[\frac{\gamma \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega'^2)} \right] \quad (5.47)$$

Vemos portanto, que as amplitudes da oscilação (x_m), exibem um valor máximo quando $\omega_0^2 - \omega'^2 = 0$, ou seja quando $\omega_0 = \omega'$, x_m (máx) = $\frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$. Esta frequência é conhecida como

frequência de ressonância (frequência própria ou natural), figura 5.16.

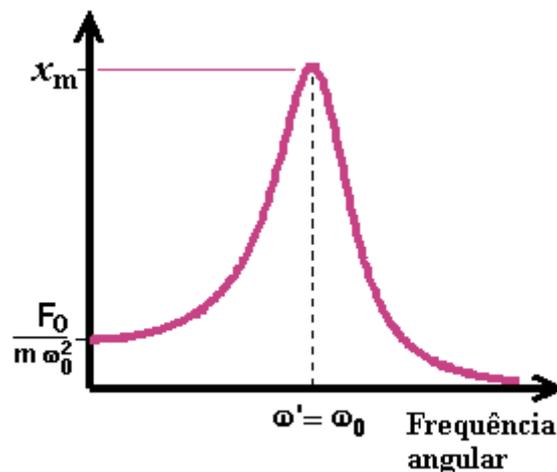


Figura 5.16 – Oscilador forçado com atrito – frequência de ressonância.

Quando a frequência da força aplicada é igual à frequência natural do oscilador, a amplitude da oscilação é máxima. Isto é um fenómeno bem nosso conhecido. Por exemplo, no caso da criança no balanço de jardim sabemos que a oscilação será máxima se aplicarmos uma força em ressonância com a frequência de oscilação natural do balanço. As ressonâncias são também responsáveis por vibrações indesejáveis em sistemas mecânicos, ruptura de estruturas como prédios e pontes sob a acção de ventos ou ondas sísmicas, etc. Todas as vezes que um oscilador está sujeito a uma força periódica com a mesma frequência que sua frequência natural, observaremos o fenómeno de ressonância. Dizemos que a força está em fase com a oscilação.

5.8 Vibrações mecânicas e o som

Em contraste com outros fenómenos vibratórios que não envolvem a participação de um meio material, como seja, por exemplo, a luz que se deve à vibração de campos electromagnéticos, a produção do som exige a presença de um meio material, seja sólido, líquido ou gasoso.

Com efeito, são as vibrações mecânicas das partículas que constituem o meio material (átomos e moléculas), as causadoras do som e este só se propaga se tiver como suporte o meio material. No vazio não ocorre a transmissão do som.

Com uma máquina pneumática e um relógio despertador antigo podemos realizar a seguinte experiência: colocamos o relógio a tocar no interior da redoma donde possa-mos extrair o ar com a máquina pneumática. Verificamos uma diminuição do som produzido à medida que é extraído o ar da redoma. Ao fim de algum tempo deixamos de ouvir qualquer som, mas o relógio continua a tocar.

5.8.1 Movimento ondulatório

Quando o movimento vibratório se produz num meio material, homogéneo e elástico, as vibrações propagam-se sob a forma de ondas elásticas e o movimento vibratório origina um movimento ondulatório. Podemos tomar como exemplo o caso de uma corda presa por uma extremidade e à qual se imprimem pequenas sacudidelas na outra extremidade. As vibrações aqui originadas propagam-se sob a forma de ondas ao longo da corda. O meio material que as transmite é um meio sólido.

Mas fenómenos idênticos podem ocorrer num meio líquido e num meio gasoso. Os fluidos também propagam as vibrações neles produzidas.

Temos, por exemplo, o caso da água, onde se formam ondas, que alastram, sempre que, em qualquer ponto, se produz uma agitação; ou ainda o caso de um gás onde as vibrações originadas pelo martelinho de uma sineta se transmitem à distância produzindo o som.

A descoberta de que o som não se transmite no vácuo, sendo portanto necessária a existência de um meio elástico para o propagar, levou os cientistas à convicção de que o mesmo aconteceria com qualquer fenómeno ondulatório; assim, surgiu a utilização do *éter* para justificar a propagação das ondas luminosas no vácuo.

O próprio *J.C. Maxwell*, unificador do electromagnetismo (cujas equações receberam o seu nome), começou por aceitar o éter como um fluido imaterial, invisível, elástico, existente por todo o espaço sideral e servindo de suporte à propagação das ondas electromagnéticas. Somente com a experiência de *Michelson* e *Morley*, realizada em 1887 nos EUA, foi eliminado o conceito do éter como suporte da propagação das ondas luminosas.

Com o desenvolvimento da teoria electromagnética de *Maxwell* e as experiências de *Hertz* que a comprovaram foi, finalmente, compreendido que para a propagação das ondas electromagnéticas, nas quais estão incluídas as ondas luminosas, não é necessária a existência de qualquer meio material; com efeito, trata-se de vibrações de campos e não de partículas, como acontece na propagação do som.

5.8.2 Equação de Onda

Sabemos já a equação (5.1) do movimento harmónico simples (M.H.S.)

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

A onda resultante da vibração num meio elástico vai propagar-se e pretendemos estabelecer uma relação entre a elongação dessa onda num dado instante e num dado ponto do espaço situado à distância x da perturbação inicial, com os parâmetros que caracterizam esta última.

A esta relação chamamos - *equação de propagação das ondas*.

Consideremos o caso mais simples, ou seja, uma propagação linear ao longo do eixo do X (direcção de propagação). Um exemplo concreto é o caso da propagação, ao longo de uma corda, de uma vibração produzida num extremo desta.

Seja \bar{v} a velocidade com que se propaga. Se quisermos exprimir o tempo t_1 , que a perturbação leva a percorrer a distância x , escreveremos;

$$t_1 = \frac{x}{v} \quad (5.48)$$

(supomos $v = c$.^{te})

A elongação y de um ponto da corda situado à distância x do ponto inicial vai ocorrer com um atraso de $\frac{x}{v}$ em relação a t . Podemos então escrever que;

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)\right) \quad (5.49)$$

Para um movimento rectilíneo e constante, sabemos relacionar o espaço percorrido x , com a velocidade v (constante) e o intervalo de tempo decorrido t . Vemos assim, que o *comprimento de onda* é a distância correspondente a um período, ou seja,

$$\lambda = vT \quad (\text{m}) \quad (5.50)$$

$$y(x, t) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right) \quad (\text{m}) \quad (5.51)$$

a qual representa a *equação de propagação de uma onda elástica* a uma dimensão.

Verifica-se que y é uma função do espaço e do tempo, podendo escrever-se $y = f(x, t)$.

O significado físico da equação é que a perturbação inicial se propaga segundo uma sinusóide, sendo também sinusoidal a variação no tempo.

Por outras palavras se, no mesmo instante (fixado o tempo) olharmos para toda a corda, podemos ver uma sinusóide; se fixarmos a nossa atenção num ponto da corda (fixado o espaço) e o observarmos em instantes sucessivos, veremos que executa um movimento vibratório sinusoidal.

Representação gráfica destas duas situações

5.8.2.1 Periodicidade no espaço

Tomemos a equação de onda para $t = 0$ (s), fica então neste caso;

$$y(x,0) = A \sin\left(2\pi\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

(com fase inicial igual a $\pi/2$)

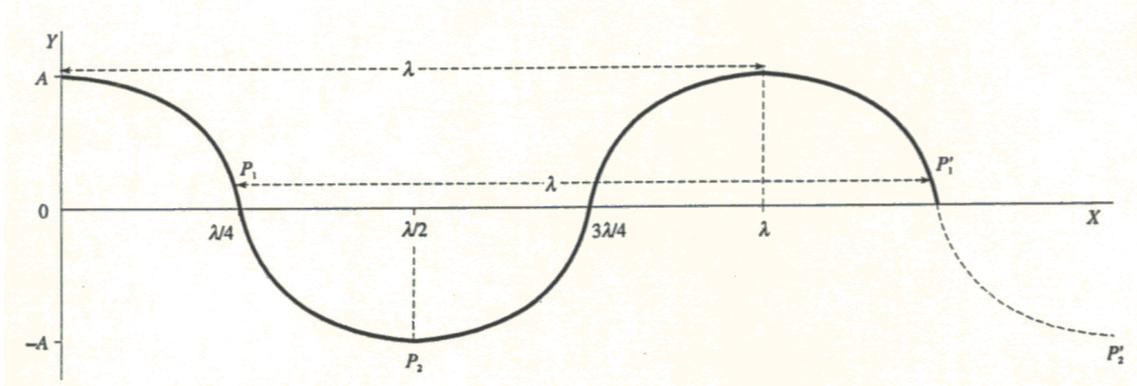


Figura 5.17 - Periodicidade no espaço.

Os pontos P_1 e P_1' na figura 5.17 encontram-se na mesma fase de vibração, assim como os pontos P_2 e P_2' , a distância entre eles é de um comprimento de onda (λ ou c.d.o.).

5.8.2.2 Periodicidade no tempo

Tomemos a equação de onda para $x = \lambda$ (m). Temos então;

$$y(\lambda, t) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

(com fase inicial igual a $\pi/2$)

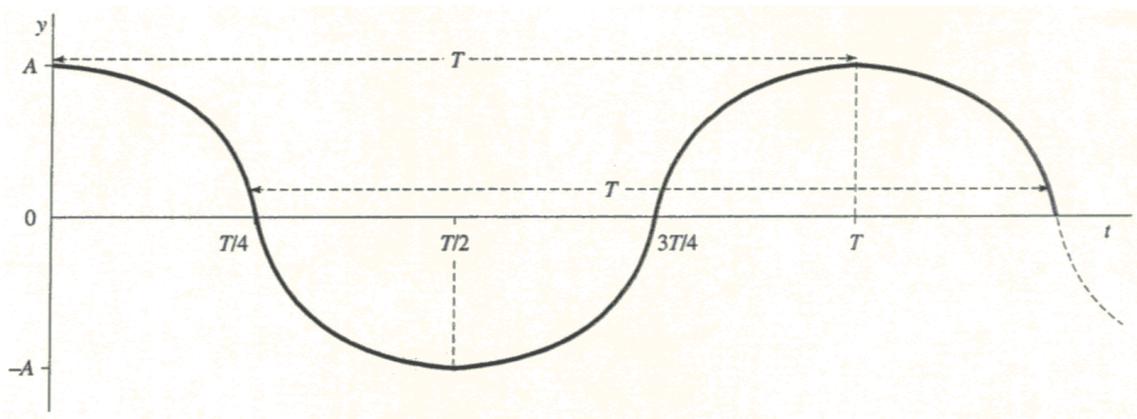


Figura 5.18 - Periodicidade no tempo.

Como se vê na figura 5.18 o período T é o intervalo de tempo que separa dois pontos na mesma fase de vibração.

5.9 Ondas transversais e ondas longitudinais

5.9.1 Ondas transversais

Voltamos a considerar o caso da propagação de ondas num meio sólido, homogéneo e elástico.

Na figura 5.19 representa-se a vibração de uma partícula de uma substância sólida (suposta também elástica) e ao lado dessa partícula, todas as outras que são suas vizinhas.

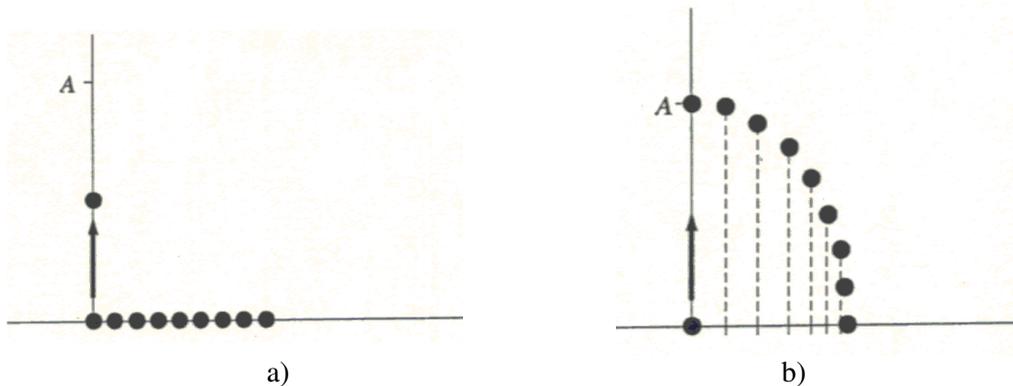


Figura 5.19 a) e b) - Propagação de uma vibração transversal.

Decorrido aproximadamente um quarto de período e devido ao atrito existente entre as partículas, a situação será a da figura 5.19 b).

A vibração transmite-se, pois, numa **direcção perpendicular** à da própria vibração. É este modo de propagação que caracteriza as **ondas transversais**, figura 5.20. Assim, as partículas alcançadas pelas ondas deslocam-se numa direcção perpendicular à direcção de propagação da onda. As ondas electromagnéticas e as ondas sísmicas S (ditas secundárias) são exemplos na natureza de ondas transversais.



Figura 5.20 – Simulação de propagação de uma onda transversal.

5.9.2 Ondas longitudinais

Vejamos seguidamente o que é uma onda longitudinal.

Imagine-mos um cilindro com um êmbolo contendo ar (uma seringa por exemplo). Se imprimirmos ao êmbolo um movimento de vaivém vamos provocar no ar contido no cilindro uma série de compressões e descompressões (figura 5.21). As moléculas de ar situadas mais próximo do êmbolo adquirem movimento vibratório que se transmite às moléculas vizinhas situadas à direita e à esquerda.

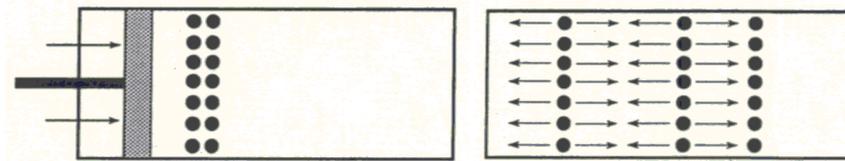


Figura 5.21 - Propagação de uma vibração longitudinal.

Formam-se, deste modo, ondas longitudinais: ondas cuja **direcção de propagação** coincide com a **direcção de vibração**, figura 5.22. Assim os movimentos das partículas alcançadas pela onda têm a mesma direcção que a propagação da onda. Nos líquidos predominam as ondas longitudinais, embora também se produzam ondas transversais; nos gases só há propagação longitudinal; nos sólidos coexistem os dois tipos de propagação.

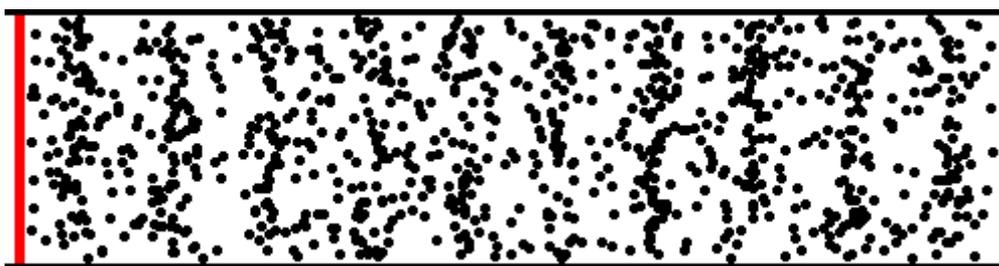


Figura 5.22 – Simulação de propagação de uma onda longitudinal.

Um exemplo da formação de ondas longitudinais num sólido pode ser encontrado no movimento de uma mola, disposta horizontalmente sobre uma mesa, a qual é alternadamente comprimida e distendida; a vibração produzida numa das extremidades é transmitida ao longo das espiras, na própria direcção em que ocorreu.

5.10 Som

5.10.1 Intensidade do som

A intensidade é a energia transportada pela onda sonora que atravessa a unidade de área numa superfície situada perpendicularmente à direcção de propagação, por unidade de tempo. Assim, a unidade no sistema S.I. da intensidade é o $W.m^{-2}$. (usualmente, no entanto, mede-se a intensidade em $W.cm^{-2}$).

A intensidade de um som depende da amplitude da onda, mas é independente da frequência, figura 5.23. Assim, podemos ter um som forte (muito intenso) de baixa frequência (grave) ou um som fraco (pouco intenso) de alta-frequência (agudo).

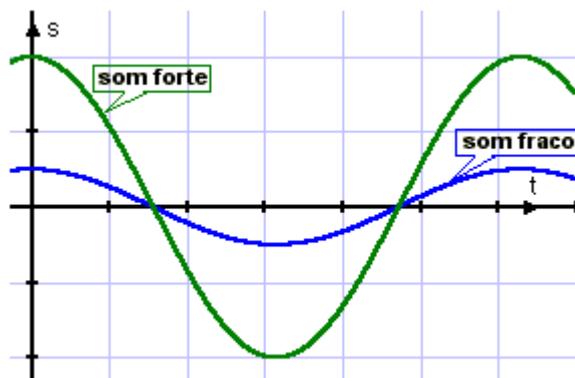


Figura 5.23 – Intensidade (amplitude) do som.

Para superar a dificuldade da enorme variação de intensidade captadas pelo ouvido humano (da ordem de 10^{12}) temos de recorrer a uma escala logarítmica, introduzindo também uma nova grandeza, o **nível de intensidade acústica ou sonora**. Define-se o nível de intensidade sonora β (em decibel - dB) pela expressão:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (5.52)$$

em que I_0 representa uma intensidade de referência, normalmente a do som mais débil que se pode ouvir (da ordem de grandeza de $10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$) a 1000 Hz. A unidade desta nova grandeza é o **bel** (símbolo B) igual a 10 decibel (dB).

Apliquemos a equação anterior a dois casos extremos. Primeiro a um som cuja intensidade é da ordem de grandeza do som mais fraco que é possível ouvir:

$$\beta = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad (5.53)$$

Conclui-se que esse nível de intensidade é de 0 (zero) decibel.

De seguida apliquemos a mesma expressão a um som cuja intensidade está no outro extremo ($I = 10 \text{ W.m}^{-2}$), ou seja, a de um som muito forte mas sem causar ainda qualquer dano no ouvido:

$$\beta = 10 \log \frac{10}{10^{-12}} = 10 \log 10^{13} = 10 \times 13 = 130 \text{ dB} \quad (5.54)$$

É a partir deste valor 130 dB - que o som se torna nocivo (há, no entanto, autores que situam este limite em 120 dB).

Seguem-se na figura 5.24 e na tabela 5.1 alguns exemplos de intensidade e respectivos níveis de intensidade.

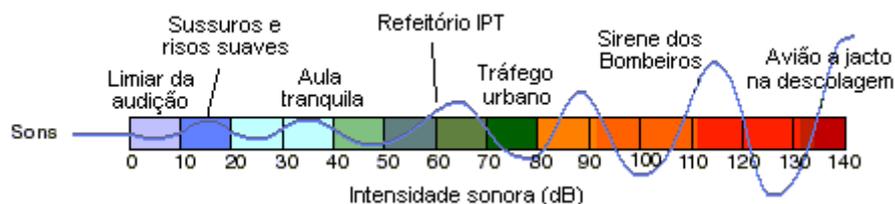


Figura 5.24 – Intensidade de alguns sons.

Tabela 5.1 - Intensidade de alguns sons.

Som	β (em dB)	I (em W.m^{-2})
Conversa em voz baixa	20	10^{-10}
Automóvel em andamento moderado	50	10^{-7}
Conversa normal	60	10^{-6}
Rua com muito tráfego	70	10^{-5}
Metropolitano	100	10^{-2}
Banda de rock	120	1
Avião a jacto, lançamento de foguetão	130	10

5.10.2 Altura

A altura de um som está relacionada com a frequência da onda sonora.

Assim, um som agudo corresponde a uma frequência elevada, um som grave corresponde a uma baixa frequência (ver figura 5.25). O lá normal tem a frequência de 435 Hz, sendo esta frequência usada como padrão de altura.

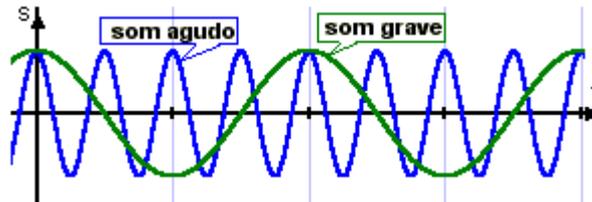


Figura 5.25 – Altura das ondas.

Os limites da audibilidade normal, para o ouvido humano, estão compreendidos entre os valores de 20 Hz a 20 kHz. Na música, as frequências normalmente utilizadas situam-se entre 30 e 4000 Hz (ver tabela 5.2).

Tabela 5.2 – Domínio e denominação das ondas mecânicas.

Frequência (Hz)	Denominação	Método de excitação	Aplicação
0,5 ---- 20	Infra-sons	Vibração da água em grandes reservatórios, batidas do coração.	Prognóstico do tempo, diagnóstico de doenças do coração.
20 ---- 2.10 ⁴	Sons Audíveis	Voz humana e de animais, instrumentos musicais, apitos, sirenes, alto-falantes.	Para comunicação e sinalização, medição de distâncias.
2.10 ⁴ ---- 10 ¹⁰	Ultra-sons	Emissores magnetostrictivos e piezoelétricos, apitos de Galton, alguns animais (morcegos, grilos, gafanhotos, etc.)	Detecção submarina por eco, limpeza e detecção de defeitos em peças e estruturas, aceleração de reacções químicas, investigação médica, biologia e física molecular.
10 ¹¹	Hipersons	Vibrações térmicas das moléculas	Em investigações científicas.

Entrando em conta com a intensidade do som sucede que, para cada frequência, há um mínimo de intensidade, abaixo do qual o som não é audível; o valor mais baixo destes mínimos situa-se nos 2000 Hz, apresentando o ouvido humano a sua máxima sensibilidade para esta frequência. No outro extremo há um máximo de intensidade para cada frequência; o máximo dos máximos corresponde à frequência de 1000 Hz, zona onde o ouvido humano apresenta a sua maior sensibilidade.

Os sons cujas frequências excedem os 20 kHz são designados por **ultra-sons**; os **infra-sons** apresentam frequências abaixo dos 20 Hz. Tanto uns como outros não são detectados pelo ouvido humano. Há no entanto animais - os golfinhos, por exemplo - que ouvem sons de frequências superiores a 100 kHz. Os cães também são sensíveis a ultra-sons.

O som a que estamos constantemente sujeito e a ouvir é o resultado da **sobreposição** (interferência) de fontes sonoras distintas, cada uma delas emitindo vibrações com diferentes frequências (altura) e intensidades (amplitude), figura 5.26.

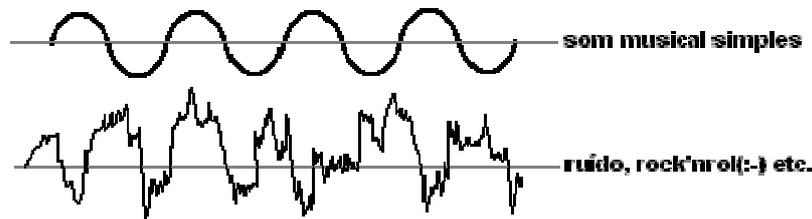


Figura 5.26 – Som puro e ‘ruído’.

5.10.3 Velocidade de propagação do som

Embora a maior parte das experiências que conduziram à medição precisa da velocidade do som tenha ocorrido ao longo de todo o século XIX, já Newton havia afirmado que a *velocidade de propagação do som num gás devia ser inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade do gás, dependendo, além disso, da sua pressão.*

As primeiras determinações baseavam-se na grande diferença, já então conhecida, entre a velocidade da luz (“quase instantânea” à nossa escala) e a do próprio som. Ao disparar uma peça de artilharia, situada a uma distância conhecida, o observador media o intervalo de tempo entre o clarão à boca da peça e a audição do som que esta produzia (figura 5.27). Mas as medições mais rigorosas da velocidade de propagação do som no ar basearam-se no conhecimento do eco.



Figura 5.27 – Determinação da velocidade do som.

Como se sabe, a formação do eco resulta da propriedade que as ondas sonoras têm de se reflectir quando encontram um obstáculo (ver - reflexão). Deste modo, medindo o tempo decorrido entre a emissão de um sinal sonoro e a audição do eco, e conhecendo a distância a que o obstáculo se encontrava, foi possível determinar a velocidade de propagação do som no ar. Os valores então obtidos não se afastam muito dos valores mais recentes.

Para o ar, a 0 °C e ao nível do mar, a velocidade de propagação do som é, em módulo, de **332 ms⁻¹**. Para os líquidos, ou melhor, para a água, as experiências realizadas por *Colladon* e *Sturm*, em 1828, no lago Léman, conduziram ao resultado de **1435 ms⁻¹**.

Para os gases, em geral, a velocidade de propagação do som está relacionada com a pressão e a densidade pela expressão;

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (\text{ms}^{-1}) \quad (5.55)$$

onde p representa a pressão média do gás, ρ a sua densidade e γ o índice adiabático do gás. (A intervenção deste índice justifica-se porque a sucessão de compressões e de expansões associadas à propagação das ondas sonoras processa-se tão rapidamente que não chega a haver transferências de calor entre zonas a diferentes temperaturas tomando assim possível que se considere o processo adiabático). Por outro lado, supõe-se que o comportamento do gás é o de um gás ideal. A velocidade de propagação do som no ar, pode ser aproximada pela seguinte expressão, onde t é a temperatura do ar, em graus *Celsius*.

$$v = 331\sqrt{1+0,00366t} \quad (\text{ms}^{-1}) \quad (5.56)$$

Tabela 5.3 - Velocidade de propagação do som em vários materiais.

Meio material	Temperatura (° C)	Velocidade (ms ⁻¹)
Borracha	20	100
Ar	0	332
Cortiça	20	500
Hidrogénio	0	1284
Mercúrio	25	1450
Água do mar	25	1532
Ferro	20	3170
Cobre	20	3750
Vidro	20	5000
Aço macio	20	5200
Granito	20	6400

Um conceito útil que permite uma análise simplificada na propagação de qualquer onda, é a de considerarmos a onda como um feixe que se propaga ao longo do seu sentido de movimento, à semelhança de um feixe de luz (luz essa que sabemos ter propriedades ondulatórias).

A propagação de uma onda, a partir de um ponto (ou região) emissor(a) (onde ocorre uma vibração) pode ser; num meio unidimensional (1D) como uma corda de uma guitarra, num meio bidimensional (2D) como a membrana de uma bateria ou num meio tridimensional (3D) como o ar. Nestes casos, os feixes (ou raios) de propagação evoluem no espaço (e sempre no tempo) a uma, duas ou três dimensões. O feixe (ou raio) de propagação é sempre tangente à velocidade de propagação da onda e perpendicular à frente de onda.

5.10.4 Reflexão

Assim como um feixe (ou raio) de luz se reflecte no espelho, também um feixe de som se reflecte (ou se desvia) de qualquer obstáculo encontrado no seu trajecto. Os raios sonoros obedecem aos mesmos princípios básicos que os raios luminosos na óptica, e verificamos que, quando a superfície de incidência é um plano, o ângulo de incidência de um raio sonoro

é igual ao seu ângulo de reflexão (figura 5.28). Temos neste caso o que chamamos de reflexão especular.

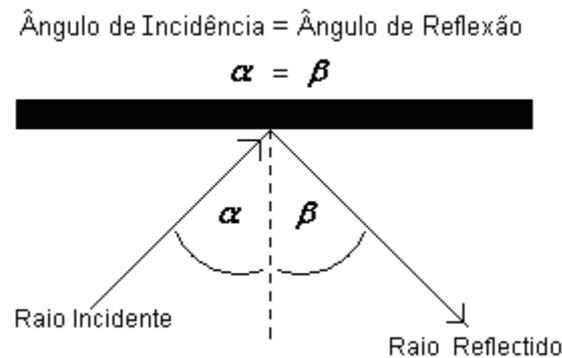


Figura 5.28 – Lei da Reflexão.

Na prática as nossas superfícies, por mais bem polidas que possam parecer, exibem sempre uma rugosidade. Tal efeito aliado ao facto de termos sempre um conjunto incidente de feixes paralelos, permite-nos detectar que existe também reflexão para além desse ângulo, mas o máximo de feixes (máximo da energia) refletidos continua, na maior parte das situações, a ser para esse ângulo (figura 5.29). Esta reflexão em superfícies reais é denominada de reflexão difusa e a difusão (espalhamento) dos feixes é função da rugosidade destas. No entanto, a nível microscópico a lei da reflexão continua a ser válida, e para cada feixe o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

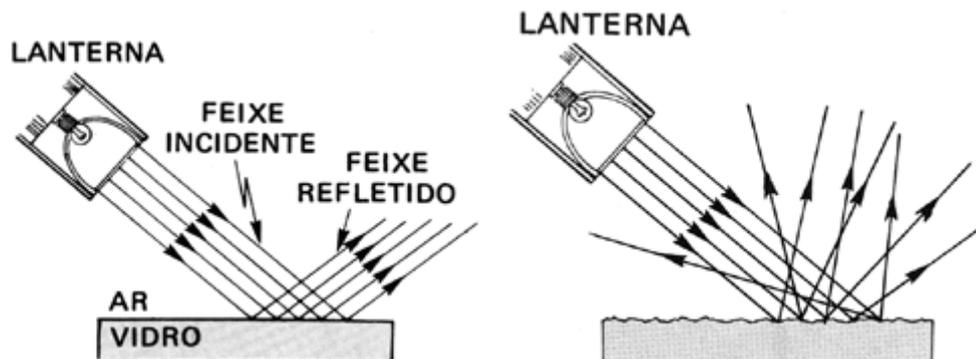


Figura 5.29 – Reflexão especular e reflexão difusa.

Para ambos os casos podemos ter duas situações: **1) reflexão total**, em que todos os feixes são refletidos ou **2) reflexão parcial** e parte destes são absorvidos pelo meio onde se está a dar a reflexão ou atravessam a superfície de separação entre os dois meios, continuando (de alguma forma) o seu percurso no segundo meio.

Falamos de reflectância (ou factor de reflexão) ρ_λ à razão entre o fluxo refletido Φ_R e o fluxo incidente Φ_I , (o índice λ significa que a reflectância é função do comprimento de onda).

$$\rho_\lambda = \frac{\Phi_R}{\Phi_I} \quad (5.57)$$

Na figura 5.30 está ilustrada a reflexão total de uma onda unidimensional (um impulso numa corda), quando a onda se reflecte (na sua extremidade) num meio mais denso e menos denso.

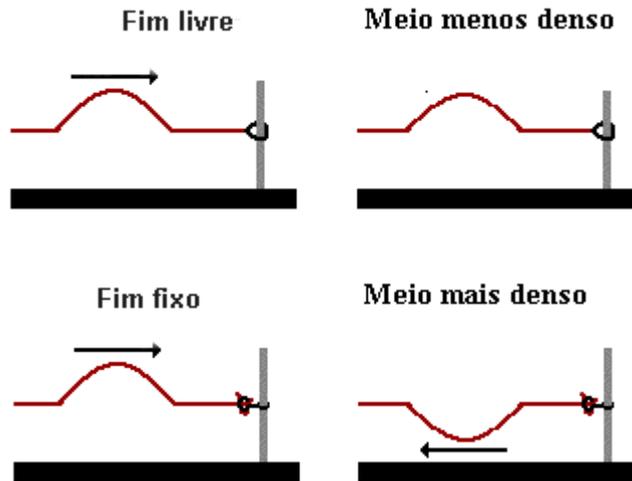


Figura 5.30 – Reflexão de uma onda unidimensional.

5.10.5 Absorção

A absorção é uma característica muito importante no estudo do som, embora na realidade não seja uma propriedade das ondas sonoras, mas antes uma propriedade dos materiais e formas existentes no ambiente onde incide e se propaga o som. Os materiais não têm nunca um comportamento perfeitamente elástico, pelo que na prática, a reflexão observada nas superfícies destes nunca é total, existe sempre uma fracção dos feixes que não é reflectida.

5.10.6 Refracção

Quando uma onda passa (através de uma fronteira) de um meio onde se propaga com velocidade v_1 , para outro meio com diferente velocidade v_2 , a sua direcção de propagação é alterada (figura 5.31), função do ângulo de incidência e da razão entre as referidas velocidades nos dois meios, embora a propagação permaneça no mesmo plano inicial. À razão entre as velocidades nos dois meios (homogéneos e isotrópicos) chamamos índice de refração relativo.

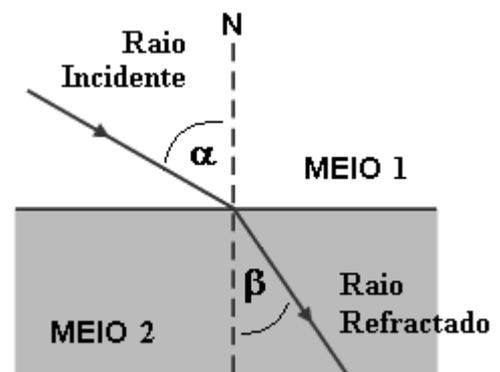


Figura 5.31 – Efeito de refração.

Para o caso particular da luz (ondas electromagnéticas transversais), o índice de refração de qualquer meio translúcido é a razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo e no meio em questão. Tomando $c_0 = 2,998 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ como valor para a velocidade de propagação da luz no vácuo, para um meio com velocidade v , o índice de refração desse meio é:

$$n = \frac{c_0}{v} \quad (5.58)$$

Assim, pela definição, o índice de refração do vácuo é unitário. Para todos os outros meios materiais, o seu valor é sempre superior à unidade. Na tabela 5.4 temos valores do índice de refração de diversos meios materiais e na tabela 5.5, da água em função do comprimento de onda.

Tabela 5.4 – Índices de refração de diferentes materiais.

Meio material (PTN)	Índice de refração (589 nm)
Ar	1,000292
Hélio	1,000035
Quartzo fundido (18 °C)	1,458
Água (20 °C)	1,33299
Azeite	1,47
Gelo (0 °C)	1,31
Vidro (<i>crow</i> - borossilicato)	1,5160
Âmbar	1,546
Cloreto de Sódio	1,544
Gelatina	1,530
Diamante	2,4173

Tabela 5.5 – Índice de refração da água, em torno da luz visível.

Comprimento de onda (nm)	Índice de refração
200	1,423
300	1,358
400	1,343
500	1,336
600	1,332
700	1,330
800	1,328
1000	1,325
2000	1,315

O índice de refração relativo, do meio 1 em relação ao meio 2, é:

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad (5.59)$$

A relação que existe entre os ângulos de incidência e de refração e o índice de refração dos meios, é a chamada lei de *Snell-Descartes*.

$$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (5.60)$$

No caso da nossa figura 5.31, temos; $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} = n_{21}$

Na figura 5.32 está ilustrada a refração (e reflexão) de uma onda unidimensional (um impulso numa corda), quando a onda se refracta (e reflecte) num meio mais denso e menos denso.

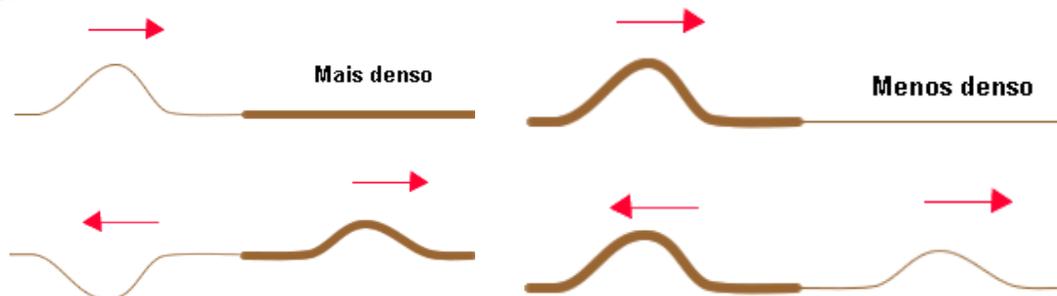


Figura 5.32 – Refração e reflexão de uma onda unidimensional.

5.10.7 Difraccção

As ondas não se propagam obrigatoriamente em linha recta a partir de uma fonte emissora. Elas apresentam a capacidade de contornar obstáculos, desde que esses obstáculos tenham dimensões comparáveis ao comprimento de onda λ (figura 5.33).

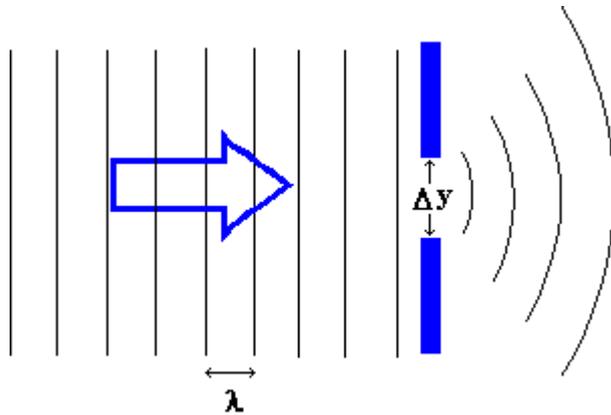


Figura 5.33 – Difraccção de uma onda plana num orifício.

A figura resultante da difracção de uma onda plana incidente num orifício de diâmetro comparável ao comprimento de onda λ (como representado nas figuras 5.33 e 5.34), está ilustrado na figura 5.35.

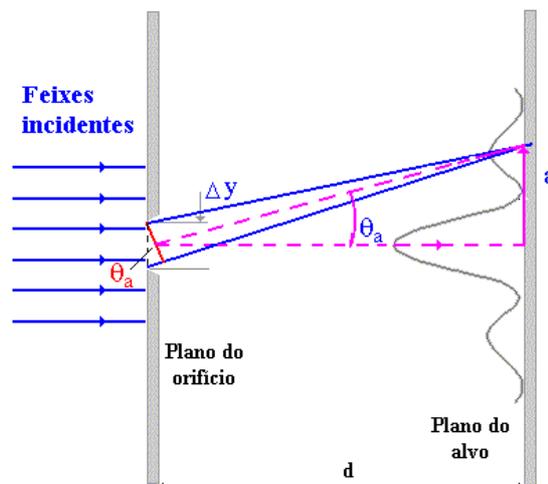


Figura 5.34 – Difraccção de uma onda plana num orifício e perfil de figura de difracção.

Um exemplo de figura de difracção (de uma “imagem pontual”) por parte de uma onda plana, são as imagens de estrelas formadas pelos telescópios. As estrelas estão tão longe que a frente de onda da luz pode ser considerada plana.

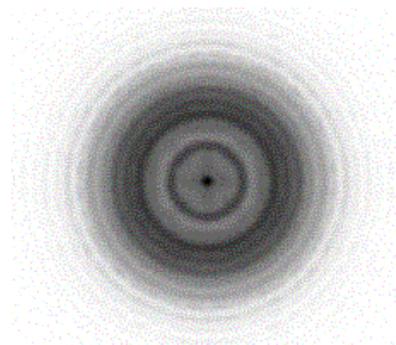


Figura 5.35 – Imagem de difracção de um orifício.

A figura de difracção é resultado da interferência da onda com o obstáculo e também com ela própria, do qual resulta uma sucessiva alternância de interferências construtivas e destrutivas (ondas em fase e em oposição de fase, respectivamente).

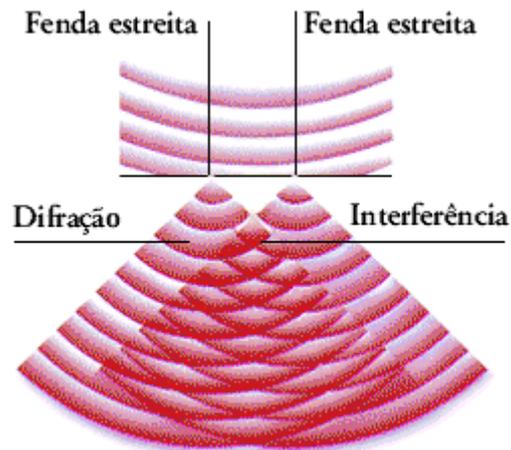


Figura 5.36 – Difracção e interferência de uma onda em dois orifícios.

5.10.8 Polarização

A polarização é um fenómeno unicamente relacionado com as ondas transversais, e está relacionado com a direcção de vibração da onda e seu modo de evolução (se for caso disso) ao longo da propagação. É um fenómeno que ocorre na natureza e também usado tecnologicamente, quando queremos escolher (ou filtrar) orientações (atenuações) nas nossas ondas.

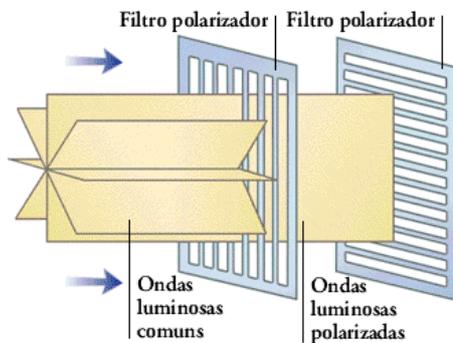


Figura 5.37 – Polarização sucessiva com filtros polarizadores.



Figura 5.38 – Atenuação da luz com filtros polarizadores.

5.10.9 Efeito de *Doppler*

O efeito de *Doppler* é um fenómeno que pode ocorrer na propagação do som, na propagação da luz e, de um modo geral, noutros fenómenos ondulatórios. Se a origem das ondas estiver em movimento relativamente ao observador que as detecta, este verifica uma frequência diferente das ondas emitidas.

Vamos começar por considerar o efeito de *Doppler* na Acústica, com velocidade relativa inferior à velocidade de propagação do som.

Já todos devemos ter reparado que o som do apito de um comboio que se cruza, a grande velocidade, com a nossa posição, sofre uma variação em termos de frequência (e obviamente em termos de intensidade). Na aproximação, vai ficando cada vez mais agudo (alta frequência) e após o momento do cruzamento, na fase de afastamento, vai ficando cada vez mais grave (baixa frequência).

A esta *aparente variação de frequência das ondas* emitidas por uma origem, devido à velocidade relativa desta e do observador, chamamos *efeito de Doppler*.

Qual a relação entre a frequência real e a frequência aparente que registamos?

Seja f a frequência da fonte sonora F e f' a frequência ouvida pelo observador O , nos três casos a seguir considerados:

1º Caso - Fonte móvel e observador imóvel (o exemplo do comboio que passa a grande velocidade por uma estação onde se encontra o observador).

A figura 5.39 representa a fonte F , ainda imóvel e uma frente de onda S por ela emitida; \vec{v} representa a velocidade de propagação da onda e T o período. Quando a fonte se desloca com a velocidade \vec{u} , colinear com \vec{v} , encontrar-se-á em P (figura 5.40) ao fim do tempo T ; a fase em que se encontra é, pois, a mesma em que estava quando emitiu S , pelo que emitirá uma nova onda S' .

Para um observador, imóvel, que se encontre em O , tudo se passa como se o intervalo de tempo entre as duas ondas (período T') tivesse sido encurtado.

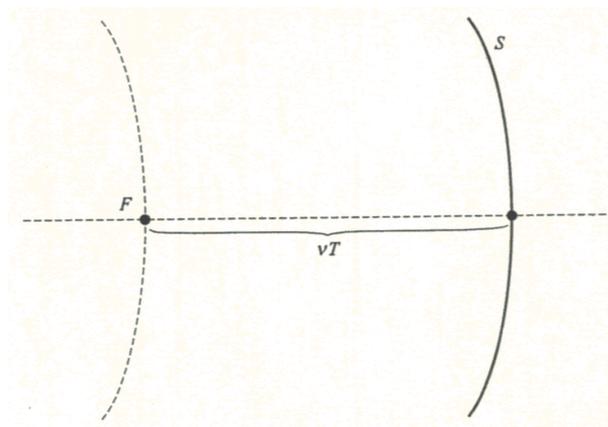


Figura 5.39 - Onda emitida por uma fonte imóvel F .

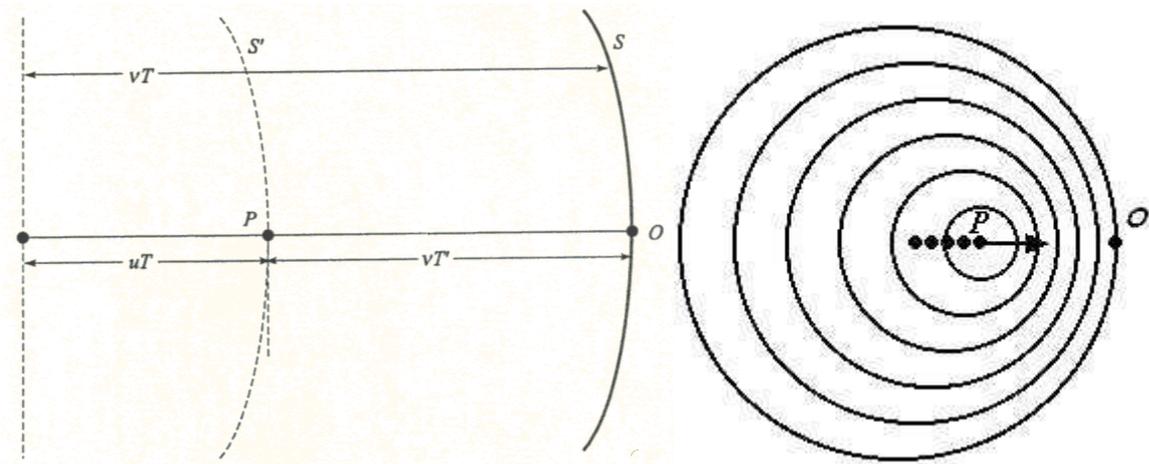


Figura 5.40 - Efeito de *Doppler* - onda emitida pela fonte em movimento *P*.

Da figura 5.40 concluímos que:

$$vT = uT + vT' \quad (5.61)$$

ou

$$\frac{v}{f} = \frac{u}{f} + \frac{v}{f'} \quad (5.62)$$

ou ainda,

$$f' = f \frac{v}{v - u} \quad (5.63)$$

Como $v > u$ e $u > 0$ (pois tem o mesmo sentido que as ondas que nos chegam), concluímos que $f' > f$, o som do apito do comboio que se aproxima torna-se mais agudo para quem está parado, na gare. Quando o comboio se afasta, $u < 0$ (o sentido da propagação das ondas é oposto ao movimento do deste), $f' < f$, o som do apito do comboio torna-se mais grave.

2º Caso - Fonte imóvel e observador móvel.

Seguindo um processo idêntico ao anterior e sendo \vec{u}' a velocidade do observador, colinear com \vec{v} , obtém-se, como resultado final;

$$\frac{f'}{f} = \frac{v - u'}{v} \quad (5.64)$$

de onde se conclui que, também neste caso, a frequência aparente f' é superior à frequência f real quando nos aproximamos de uma fonte emissora ($u' < 0$) e o inverso ocorre quando nos afastamos da fonte emissora ($u' > 0$).

3º Caso - Fonte móvel e observador móvel (caso geral).

De modo análogo ao dos casos anteriores chegava-se à relação;

$$\frac{f'}{f} = \frac{v - u'}{v - u} \quad (5.65)$$

com:

v – velocidade de propagação do som, u – velocidade da fonte emissora e u' – velocidade do observador, tomando sempre como sentido positivo, o sentido da velocidade do som até ao observador.

Podemos condensar o efeito de *Doppler* na seguinte expressão:

$$f_{obs} = f_F \frac{v_{som} \pm v_{obs}}{v_{som} \mp v_F} \quad (5.66)$$

em que:

f_{obs} é a frequência detectada, f_F é a frequência emitida, v_{som} é a velocidade de propagação do som, v_{obs} é a velocidade do observador e v_F é a velocidade da fonte emissora. Consideramos os sinais superiores de ambos os termos, quando a fonte emissora e o observador estão em aproximação e os sinais inferiores quando a fonte emissora e o observador estão em afastamento.

O efeito de *Doppler* tem aplicações importantes na investigação científica e na tecnologia, para determinação de velocidade relativas. O *Radar-Doppler* é a técnica que permite detectar os veículos motorizados que excedem a velocidade permitida por lei, tal como velocidades de formações atmosféricas.



Um dos casos mais pragmáticos na aplicação deste efeito é a descoberta em 1929 por *Edwin Powell Hubble* (1889-1953), que a esmagadora maioria das galáxias observadas são avermelhadas, isto é a sua luz está desviada para o vermelho (longos comprimentos, baixa frequência). Esta descoberta provou que o estado geral do espaço-tempo do Universo é de expansão, o que teve (e tem) grandes implicações na cosmologia – ramo que estuda a evolução, princípio e fim do (nosso) Universo.

Figura 5.41 – E. Hubble e a câmara de Schmidt do Obs. do Monte Palomar (Califórnia – USA).

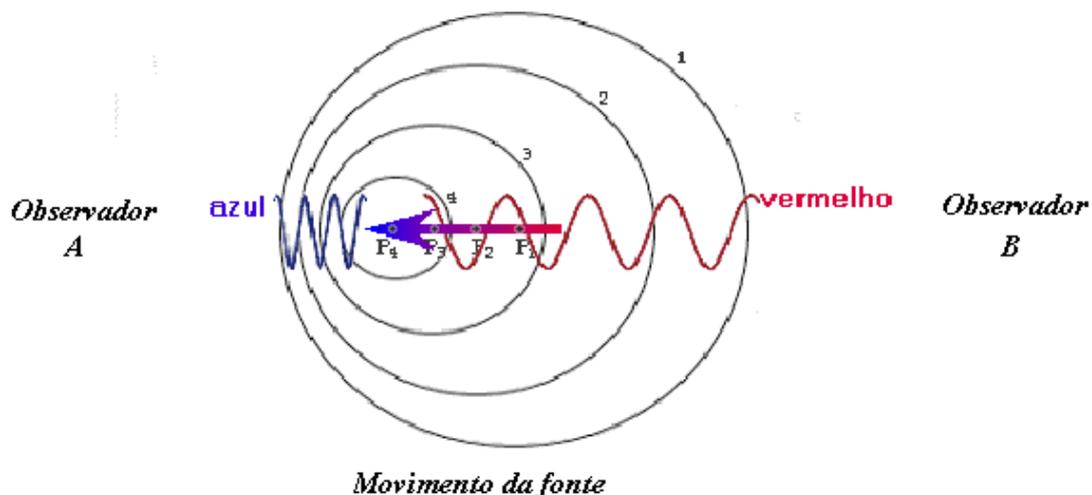


Figura 5.42 - Efeito de *Doppler* – para dois observadores opostos, A e B.

Na figura 5.42 está ilustrada a situação de como dois observadores, à esquerda (A) e direita (B), registam a frequência (ou comprimento de onda ou cor) de uma fonte luminosa em movimento, que se aproxima do observador A e se afasta do observador B.

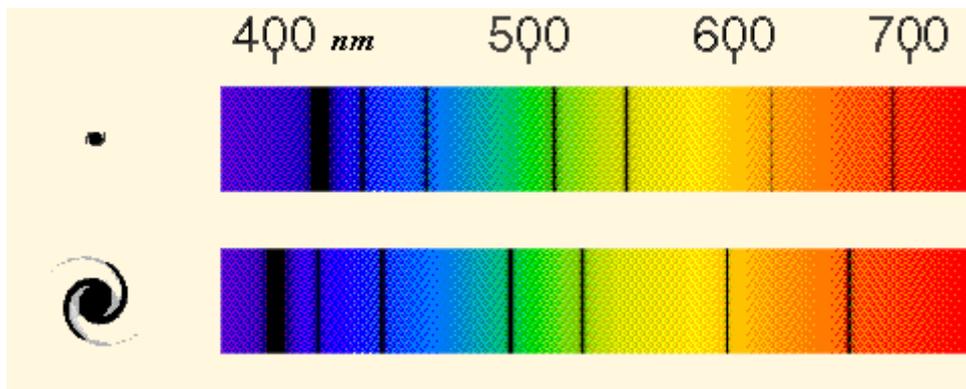


Figura 5.43 - Efeito de *Doppler* – Desvio para o vermelho que se observa no Universo.

A esmagadora maioria das galáxias que se observam no Universo, exibem riscas espectrais (dos seus componentes químicos) desviadas para o vermelho (quando comparadas com os nossos padrões laboratoriais), o que indica que se estão a afastar de nós. O que se verifica é que quanto mais ténues são as galáxias (mais longe se encontram), maior é o desvio espectral – maior é a velocidade de recessão. Existe uma relação entre essa velocidade de recessão e a sua distância efectiva, conhecida por lei de *Hubble-Homason*;

$$V \cong 16r$$

em que V é a velocidade de recessão do objecto (em kms^{-1}) e r a distância (em milhões de anos-luz) a que este se encontra de nós. Quanto mais longe o objecto astronómico, maior a sua velocidade de afastamento.

5.11 Ondas Estacionárias

5.11.1 Corda Vibrante

Vamos considerar uma corda de comprimento l (m), com as extremidades fixas e sobre as quais é aplicada uma determinada tensão T (N) para a manter esticada. Se nessa corda for aplicada uma vibração, por exemplo afastando da posição de equilíbrio uma pequena secção, veremos que ocorre a propagação de uma onda transversal. Façamos esse impulso perto da extremidade A, como ilustrado na figura 5.44. Teremos então uma onda progressiva que se propaga ao longo da corda no sentido da extremidade B. A velocidade de propagação desta onda é função da sua massa linear ρ_L (kg m^{-1}) e da tensão a que está sujeita (expressão 5.77). (na rubrica seguinte veremos em pormenor as velocidades de propagação de ondas em vários meios).

A onda progressiva pode ser descrita como;

$$y'(x,t) = A' \sin(\omega t - Kx) \quad (5.67)$$

ou seja a expressão (5.67) é a onda que se propaga no sentido positivo do eixo do X, como representado na figura 5.44.

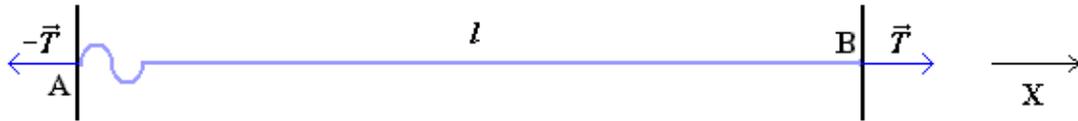


Figura 5.44 – Propagação de uma onda numa corda fixa, de comprimento l .

Quando esta onda atinge a extremidade B que está ligada num meio com maior densidade, sofre uma reflexão, e propaga-se agora no sentido contrário (onda regressiva);

$$y''(x,t) = A'' \sin(\omega t + Kx) \quad (5.68)$$

Em ambas as expressões está incluído o parâmetro K , conhecido como número de onda e definido como;

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.69)$$

Se pensarmos que a perturbação inicial se mantém, ou seja que existe continuamente uma vibração harmónica aplicada, ou que essa vibração ocorreu num ponto da corda que não uma das suas extremidades, então a onda progressiva e a onda regressiva vão interferir ao longo da corda.

$$y(x,t) = y' + y'' = A' \sin(\omega t - Kx) + A'' \sin(\omega t + Kx) \quad (5.70)$$

e como nas extremidades ($x = 0$ e $x = l$) a corda é fixa ($y = 0$ m), analisando o caso particular da extremidade A ($x = 0$ m), vem que;

$$0 = (A' + A'') \sin(\omega t) \quad (5.71)$$

o que corresponde a que tenha ocorrido uma mudança de fase na onda reflectida em relação à onda incidente, de π , ou seja que $A' = -A''$. É uma reflexão total da onda, sem refração ou absorção da onda.

A onda resultante da interferência da onda progressiva com a onda regressiva, pode ser expressa como;

$$y(x,t) = A(\sin(\omega t - Kx) - \sin(\omega t + Kx)) \quad (5.72)$$

com $A = A'$.

e aplicando as relações de igualdades trigonométricas, vem;

$$y(x,t) = -2A \sin(Kx) \cos(\omega t) \quad (5.73)$$

Analisando (5.73) verificamos tratar-se de uma expressão que nós dá a vibração ao longo do tempo (factor temporal $\cos(\omega t)$) de cada ponto x da corda, mas a elongação máxima (amplitude) desses mesmos pontos x da corda é variável ao longo do comprimento da corda com $\sin(Kx)$. Por exemplo, podem existir pontos da corda, para os quais a amplitude é nula (para além da suas extremidades fixas), ou seja, pontos que não vibram. Nesses pontos cumpre-se;

$$Kx = n\pi, \quad n \in Z \quad (5.74)$$

vindo que;

$$x = \frac{n\pi}{K} = \frac{n\pi}{2\pi} \lambda = n \frac{\lambda}{2} \quad (5.75)$$

Estes pontos que permanecem em repouso são denominados pontos nodais, nodos ou nós. A distância entre pontos nodais consecutivos é sempre de meio comprimento de onda.

Se aplicarmos a expressão (5.75) à extremidade B (de posição $x = l$ m), temos $l = n \frac{\lambda}{2}$ e então;

$$\lambda = \frac{2l}{n} \quad (5.76)$$

de onde retiramos que o comprimento de onda que se estabelece numa corda de comprimento l , não assume qualquer valor, antes pelo contrário, está precisamente quantificado e é relacionado com o comprimento desta.

A velocidade de propagação desta onda é;

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \quad (\text{ms}^{-1}) \quad (5.77)$$

que da relação entre o comprimento de onda e frequência de vibração, vem;

$$f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} = \frac{vn}{2l} \quad (5.78)$$

Como a velocidade de propagação da onda é constante, a frequência com que a corda vibra é também ela quantificada, assumindo valores precisos.

Este efeito de quantificação ocorre na nossa corda porque ela é finita. Numa corda infinita não existem estas condições fronteira, que alteram a solução da nossa equação de propagação de onda.

Para o caso $n = 1$, dizemos estar na frequência fundamental (ou 1º harmónico) de vibração da corda, e;

$$f_1 = \frac{v}{2l} \quad \text{Hz (ou s}^{-1}\text{)} \quad \text{e} \quad \lambda_1 = 2l \quad (\text{m}) \quad (5.78)$$

ou seja, o comprimento de onda no modo fundamental é o dobro do comprimento da corda, isto é, a corda tem exactamente metade do comprimento de onda. Neste modo de vibração, a corda exhibe dois pontos nodais (as suas extremidades) e no vemos (ao longo do tempo) um único fuso, como ilustrado na figura seguinte.

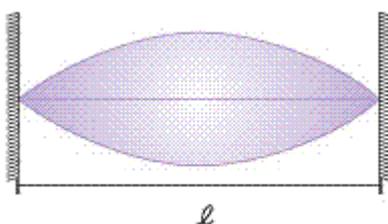


Figura 5.45 – Corda a vibrar no modo fundamental.

As figuras de vibração para o 2º e 3º harmónicos, estão representados nas seguintes figuras 5.46 e 5.47, respectivamente. Verificamos que no primeiro caso, temos 3 pontos nodais (as extremidades e o ponto central da corda) e o aparecimento de dois fusos. No segundo caso, temos 4 pontos nodais e o aparecimento de três fusos.

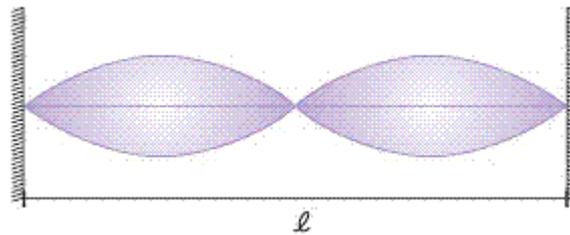


Figura 5.46 – Corda a vibrar no modo 2º harmónico.

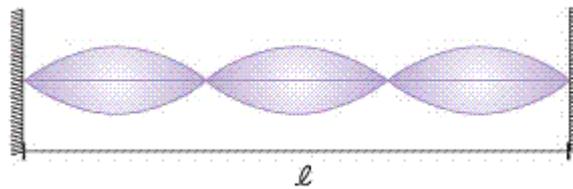


Figura 5.47 – Corda a vibrar no modo 3º harmónico.

Generalizando, temos para qualquer harmónico de ordem n ;

$$f_n = n f_1 = \frac{nv}{2l} \text{ Hz (ou s}^{-1}\text{)} \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \text{ (m)} \quad (5.79)$$

5.11.2 Velocidades de propagação

A velocidade de propagação de várias ondas (longitudinais ou transversais) depende dos meios que ocorrem. Na tabela seguinte estão expressas para vários meios, o tipo de onda e a expressão da sua velocidade de propagação.

Tabela 5.6 – Velocidade de propagação em vários meios.

Meio	Onda	Velocidade de propagação (ms ⁻¹)	“constante elástica”	Densidade do meio
corda	transversal	$\sqrt{T/\rho}$	T tensão (N)	ρ (kg m ⁻¹)
mola	longitudinal	$\sqrt{KL/\rho}$	K constante elástica (Nm ⁻¹)	ρ (kg m ⁻¹)
haste	longitudinal	$\sqrt{Y/\rho}$	Y mód. de Young (Nm ⁻²)	ρ (kg m ⁻³)
haste	transversal	$\sqrt{G/\rho}$	G mód. de rigidez (Nm ⁻²)	ρ (kg m ⁻³)
gás	longitudinal	$\sqrt{k/\rho}$	k mód. volumétrico (Nm ⁻²)	ρ (kg m ⁻³)
líquido	gravidade	$\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}}$	τ tensão superficial (Nm ⁻¹)	ρ (kg m ⁻³)

5.11.3 Batimentos

O fenômeno do batimento resulta sempre da interferência de ondas cujas frequências são muito próximas. Dessa interferência resulta uma ocorrência alternada de instantes em que as ondas estão em fase (interferência construtiva - a amplitude é somada) com instantes em que ocorre uma interferência destrutiva e a amplitude é diminuída. O batimento é assim definido como o módulo da diferença de frequências:

$$\text{batimento} = |f_1 - f_2| \quad \text{Hz (ou s}^{-1}\text{)} \quad (5.80)$$

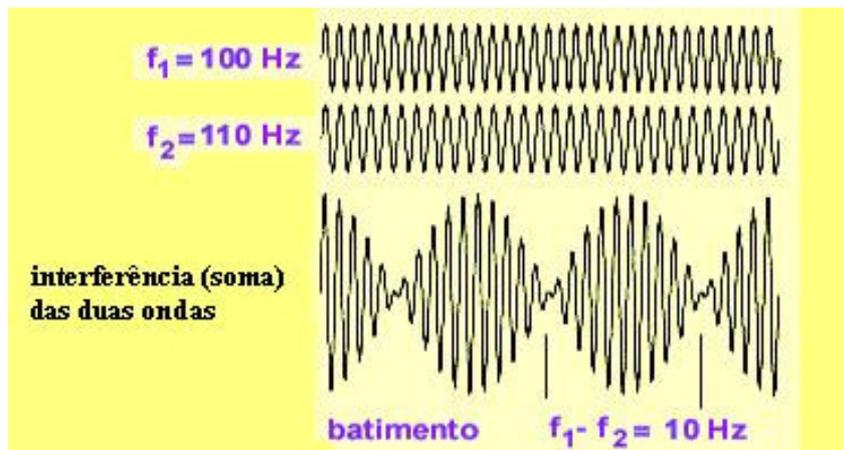


Figura 5.48 – Batimento - interferência de duas ondas.