

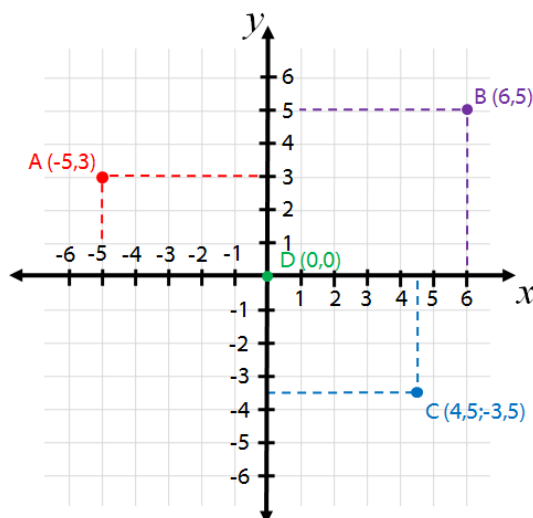
## Capítulo 1 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS

### 1.A – Conceitos Matemáticos Fundamentais

- Coordenadas Cartesianas e representação gráfica de uma função
- Função Seno e Co-seno
- Função Exponencial e Logarítmica

#### Coordenadas Cartesianas

Chamamos **Sistema de Coordenadas no plano cartesiano**, **plano cartesiano** ou simplesmente **espaço cartesiano**, a um esquema reticulado necessário para especificar pontos num determinado "espaço" com dimensões. O adjetivo Cartesiano refere-se especificamente ao matemático e filósofo francês Descartes (1596-1650) que, entre outras coisas, desenvolveu uma síntese da álgebra com a geometria euclidiana. Podem ser definidas no espaço bidimensional  $(x,y)$  ou tridimensional  $(x,y,z)$ . As rectas que definem os eixos têm sempre entre si um ângulo de  $90^\circ$ , e interceptam-se apenas num ponto – chamado de **origem do referencial**. Para localizar um ponto no espaço bidimensional, necessitamos de duas coordenadas; a abcissa (x) e a ordenada (y).



Sistema de eixos cartesianos no espaço a duas dimensões (2D).

O plano cartesiano é dividido em quatro **quadrantes**. O 1º quadrante fica situado na zona espacial do plano em que ambas as coordenadas (x e y) tomam valores positivos. Os sucessivos e restantes quadrantes, são obtidos no sentido directo (anti-horário). Pelos sinais dos valores das respectivas coordenadas cartesianas de um ponto, identificamos imediatamente qual o quadrante a que pertence. Existe um ponto de excepção, qual é?

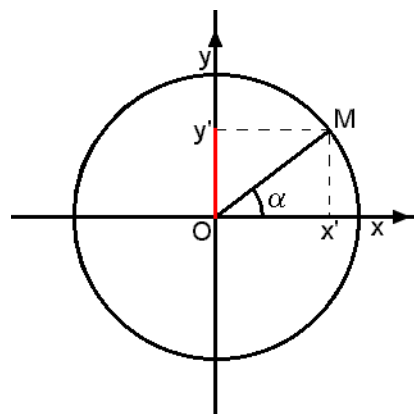
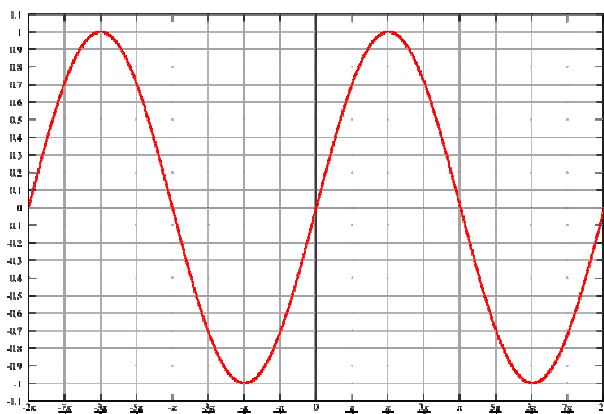
A representação de pontos no plano cartesiano pode ser discreta (pontos individuais) ou de pontos “estruturados”, ou seja com uma “ligação” entre eles; são as chamadas **funções matemáticas**, que no seu domínio de existência, a cada coordenada x corresponde um valor de coordenada y.

A palavra **Trigonometria** é de gênese grega, significando *trigonon* "**triângulo**" e *metron* "**medida**". É um dos muitos ramos da ciência matemática e estuda os triângulos, particularmente os triângulos no plano em que um dos ângulos do triângulo mede  $90^\circ$  (triângulo rectângulo). Estuda especificamente as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos, através das funções e relações trigonométricas. Quando os triângulos não são planos, e existem numa superfície esférica, usamos a trigonometria esférica.

## Função Seno

O seno é uma das funções trigonométricas. Dado um triângulo rectângulo com um dos seus ângulos internos igual a  $\alpha$ , define-se o **seno** como a razão entre o cateto oposto a  $\alpha$  ( $\overline{Ox'M} = \overline{Oy'}$ ) e a hipotenusa deste triângulo ( $\overline{OM}$ ). Ou seja:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{Ox'M}}{\overline{OM}}$$



$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**Domínio:  $\mathbf{R}$**

**Contra-Domínio:  $[-1,+1]$**

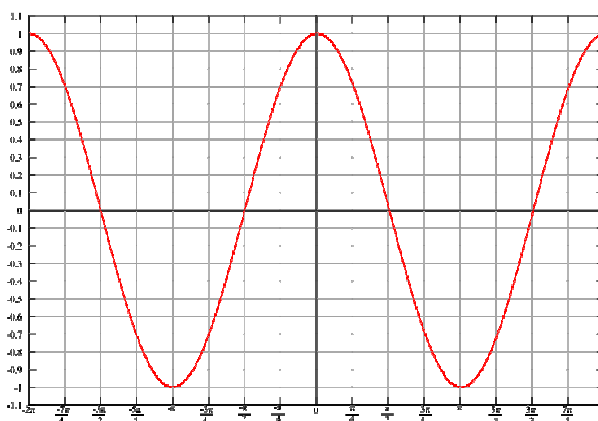
## Função Co-seno

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{Ox'}}{\overline{OM}}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

**Domínio:  $\mathbf{R}$**

**Contra-Domínio:  $[-1,+1]$**



## Função $e^x$

(exponencial)

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

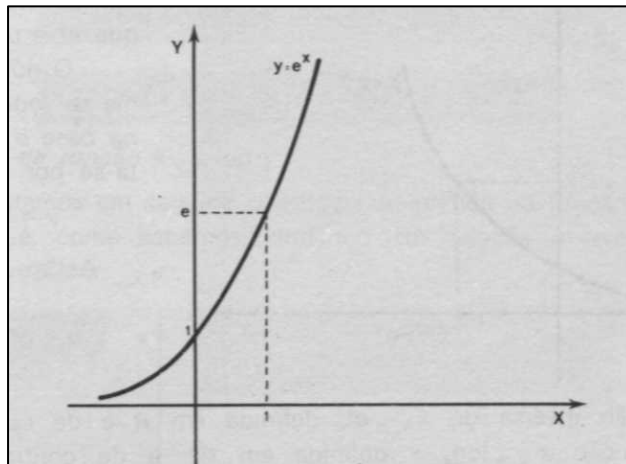
$$e \cong 2,7182818284...$$

**Domínio:**  $\mathbf{R}$

**Contra-Domínio:**  $\mathbf{R}^+$

**Crescente e positiva**

**Continua**



**Limites:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

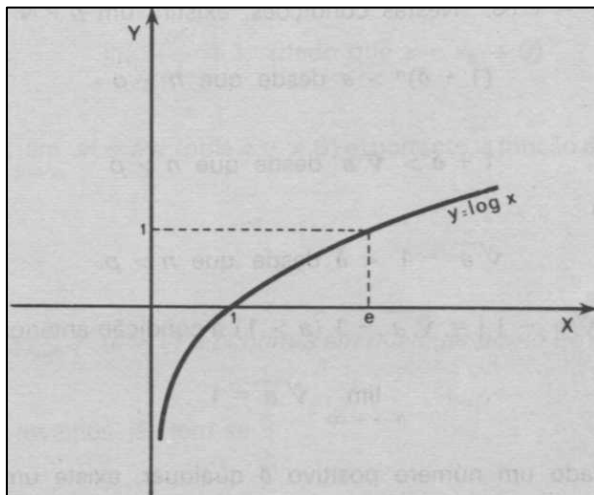
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

## Função $a^x$

em particular  $10^x$  ( $a = 10$ )

## Função $\log_e x$ ( $\ln x$ )

(como função inversa de  $e^x$ )



**Domínio:**  $\mathbf{R}^+$

**Contra-Domínio:**  $\mathbf{R}$

**Crescente**

**Continua**

**Limites:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$$

## Função $\log_a x$

em particular  $\log_{10} x$  ( $a = 10$ ) ou simplesmente  $\log x$

Como funciona a função logaritmo, ou por outras palavras, o que a função logaritmo “pergunta” é o seguinte:

**Qual é o  $x$  para o qual  $10^x = 100$  ?**

A resposta a isso é-nos fornecida pela função logaritmo,  $x = \log_{10} 100$  , que no caso presente é  $x = 2$ .

### Mais exemplos:

$$\log_{10} 1000 = 3 \text{ , pois } 10^3 = 1000$$

$$\log_{10} 10 = 1 \text{ , pois } 10^1 = 10 \quad \text{e} \quad \log_{10} 1 = 0 \text{ , pois } 10^0 = 1$$

$$\log_{10} 0,1 = -1 \text{ , pois } 10^{-1} = 0,1 \quad \log_{10} 0,001 = -3 \text{ , pois } 10^{-3} = 0,001$$

$$\ln 1000 = 6,907755279... \text{ , pois } e^{6,907755279} = 1000$$

$$\ln 100 = 4,605170186... \text{ , pois } e^{4,605170186} = 100$$

$$\ln 10 = 2,302585093... \text{ , pois } e^{2,302585093} = 10$$

$$\ln e = 1... \text{ , pois } e^1 = e \quad \ln 1 = 0 \text{ , pois } e^0 = 1$$

### Propriedades dos Logarítmos

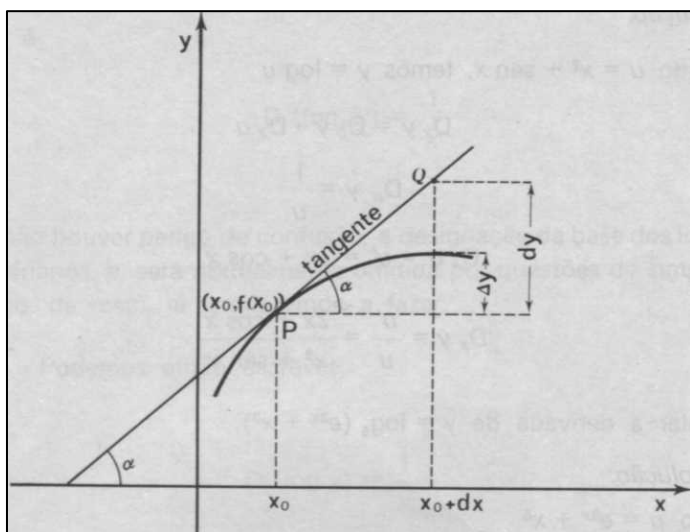
$$\log_a (u.v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a (u/v) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a x = \log_b x / \log_b a$$

### Derivadas

Mede a variação ou taxa de crescimento de uma função



$$D(e^x) = e^x$$

$$D(a^x) = \log_e a \cdot a^x$$

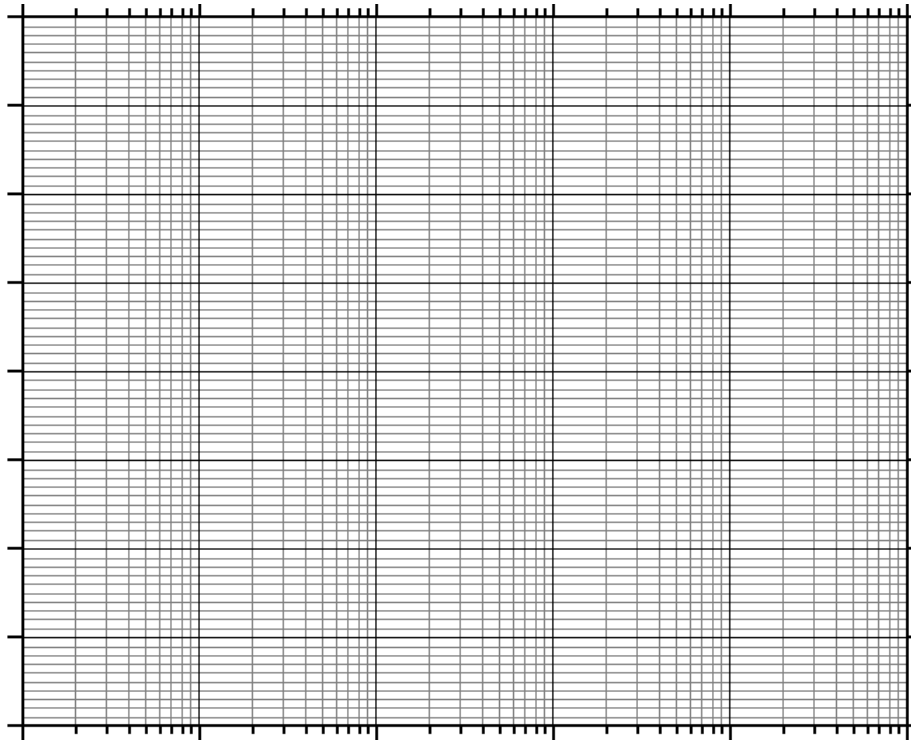
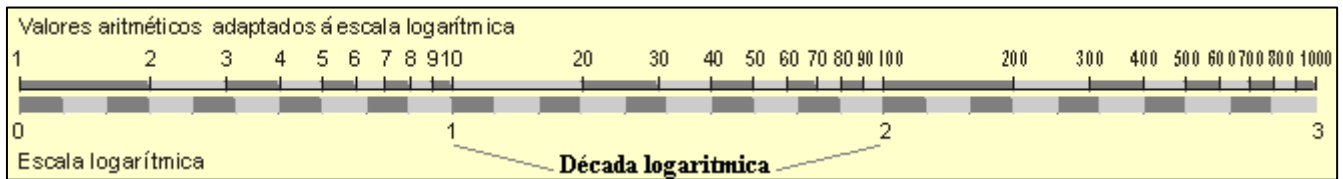
$$D(\log_e x) = 1/x$$

$$D(\log_a x) = 1/x \log_e a$$

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x) = dy/dx$$

- **Representação gráfica de funções;**
  1. em escala linear
  2. em escala semi-logarítmica (linear e logarítmica)

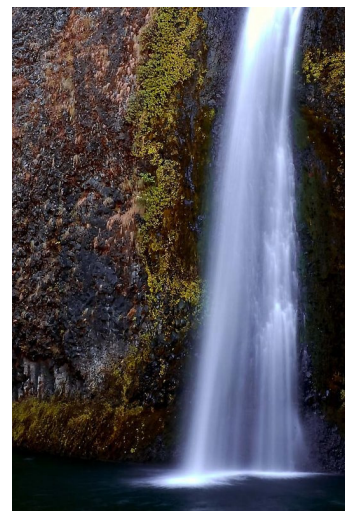


Folha de papel de escala logarítmica (de 5 décadas) versus linear.

- **Noção de Fluxo**

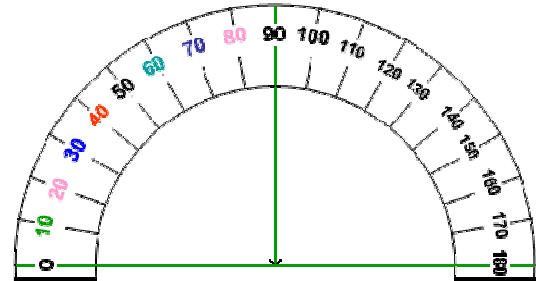
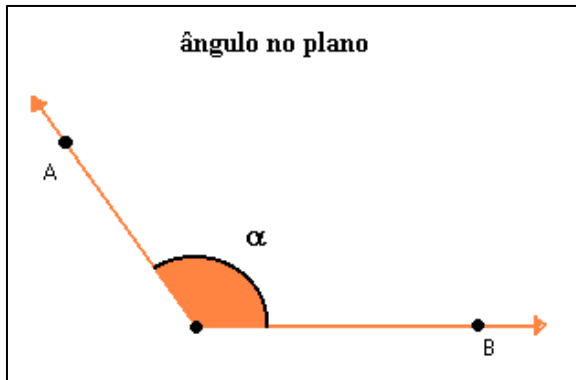
“Quantidade *de algo* (matéria, energia) que atravessa  
a  
unidade de área (orientada) na unidade de tempo”

Por exemplo o fluxo de água, como na imagem ao lado, ou o fluxo de fótons que atravessa a nossa objectiva (diafragma de íris) durante um determinado intervalo de tempo.



- Ângulo no plano e ângulo sólido

### - Ângulo no plano



transferidor para medir ângulos no plano

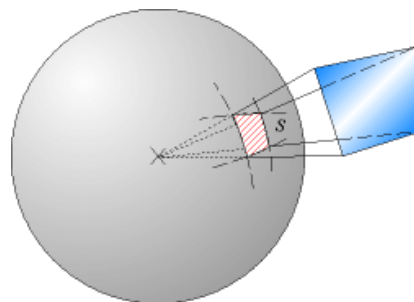
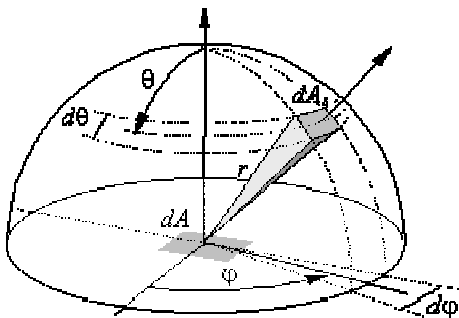
**Domínio:**  $0^\circ$  (zero) a  $360^\circ$  , 0 a  $2\pi$  (radianos)

$1^\circ$  é 1/90 parte do ângulo recto,  $1^\circ$  (grau) tem 60' (minutos de arco),  
1' (minutos de arco) tem 60'' (segundos de arco), logo  $1^\circ$  tem 3600''

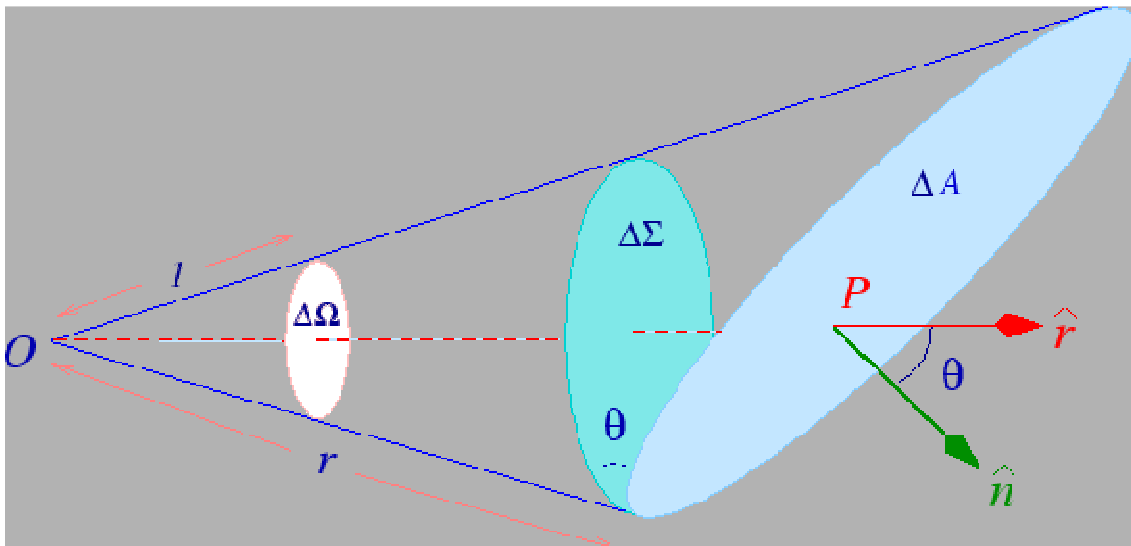
O **radiano (rad)** é o ângulo compreendido entre dois raios que, na circunferência de um círculo, intersectam um arco de comprimento igual ao raio desse círculo. (1960).  
[1 rad = 57,295 78 °] (aproximação a 5 casas decimais).

### - Ângulo sólido

Ângulo segundo o qual vemos (registamos) as superfícies dos corpos sólidos no nosso mundo tridimensional.



O ângulo sólido é função da distância a que se encontra o objecto ( $r$ ), da sua real dimensão ( $\Delta A$ ) e da sua orientação ( $\cos \theta$ ) em relação ao observador.



ângulo sólido infinitesimal ( $\Delta\Omega$ ):

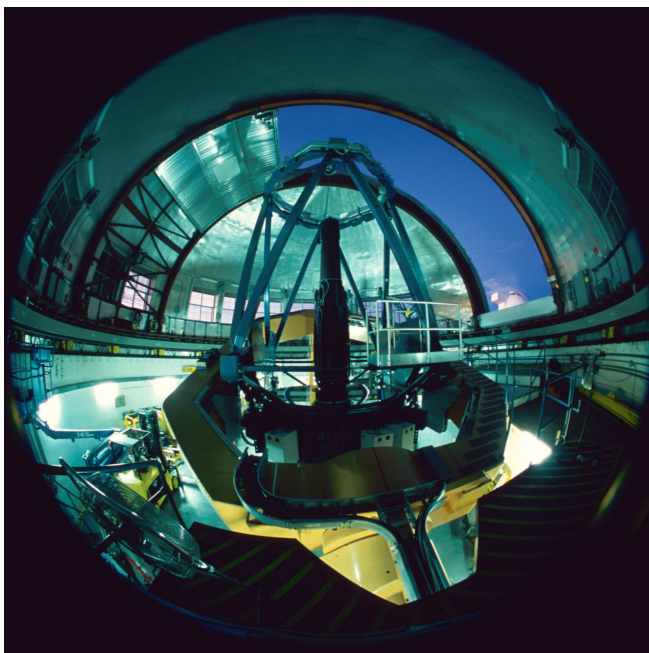
$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\Sigma}{r^2} = \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2}$$

ângulo sólido total (máximo) é:

$$\oint d\Omega = 4\pi \text{ sr}$$

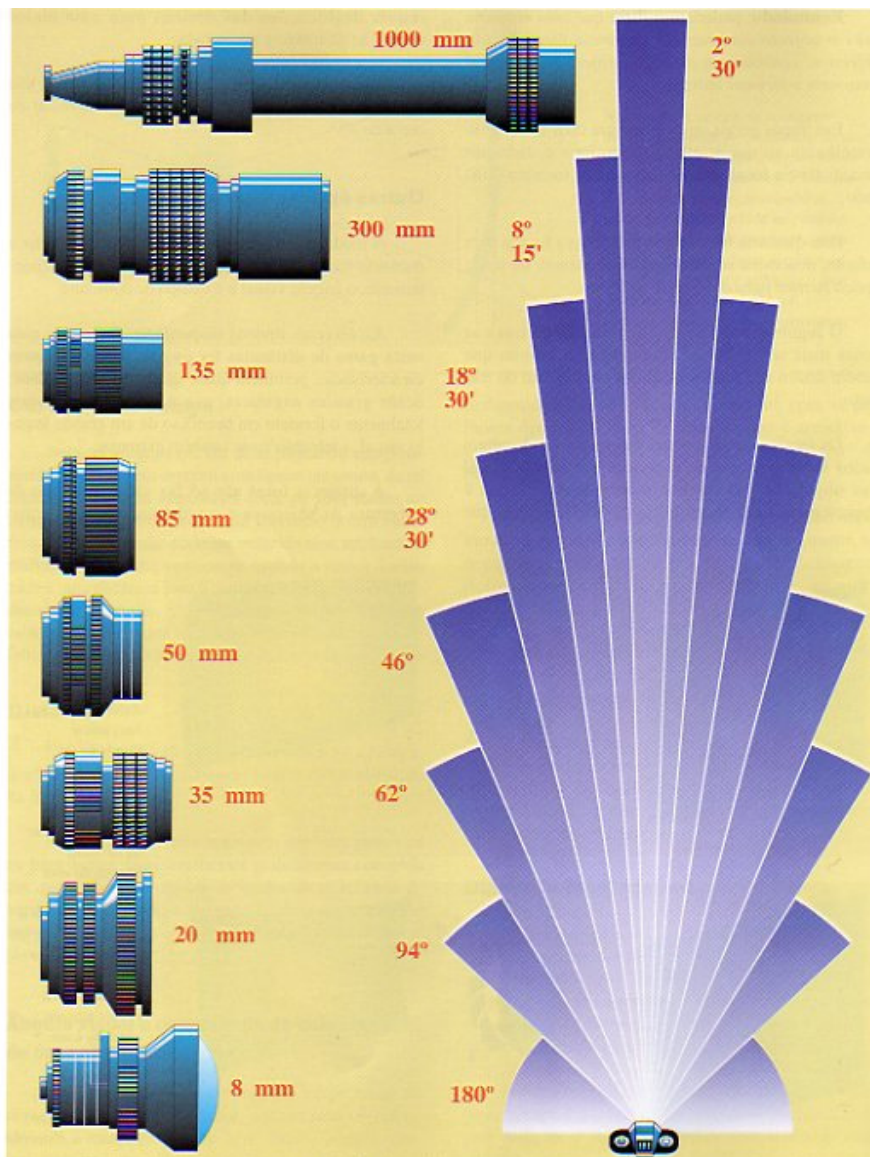
Um observador colocado na origem “vê” a totalidade do espaço em seu redor segundo o ângulo sólido de  $4\pi$  sr.

O **esterradiano (sr)** é o ângulo sólido que, tendo o vértice no centro de uma esfera, intercepta na superfície desta uma área igual à de um quadrado tendo por lado o raio da esfera. (1960). [1 sr = 3 282,806 35 graus quadrados] (aproximação a 5 casas decimais).

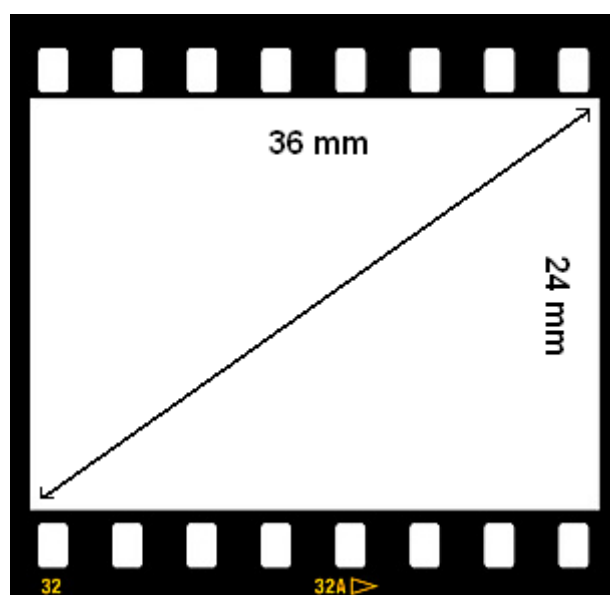


Olho-de-peixe de  $180^\circ$   
(ângulo sólido de  $2\pi$  sr).

Imagem obtida com grande angular  
de  $180^\circ$  (fish-eye).



**Campo angular diagonal coberto pelo formato de 35 mm.**



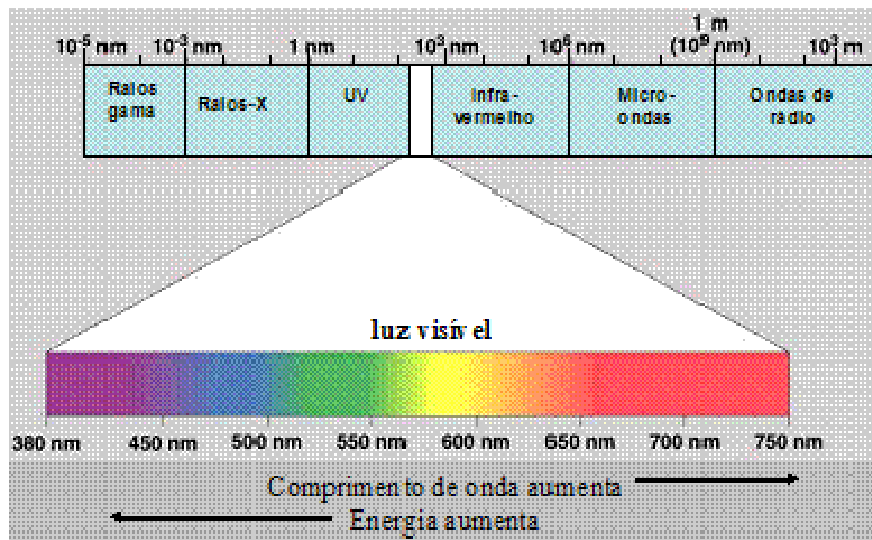
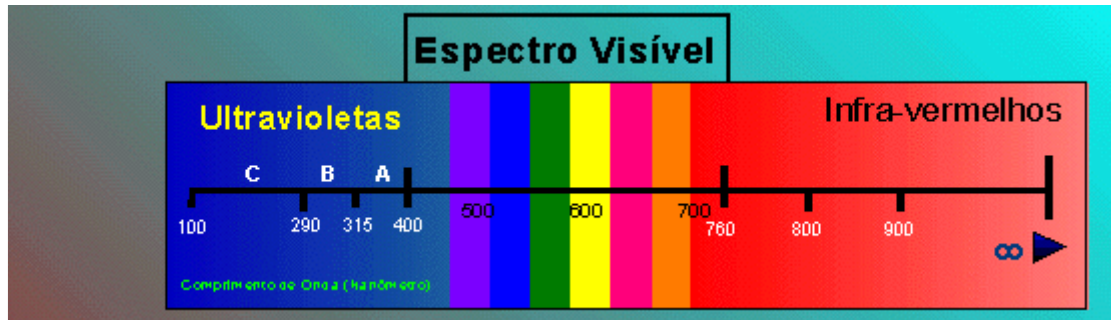
# CONCEITOS FUNDAMENTAIS

## 1b – Conceitos Físicos Fundamentais

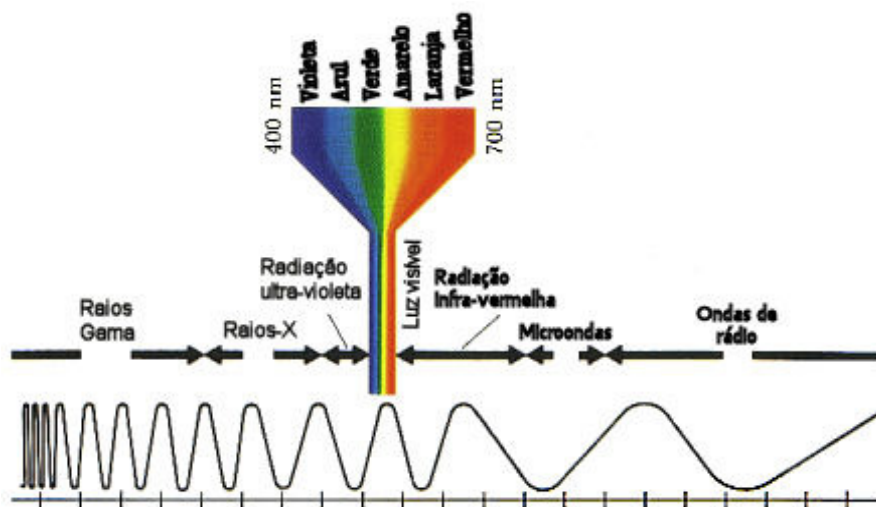
- Luz Visível

A Fotometria tem como finalidade “medir a luz” (em quantidade e qualidade)

Luz visível entre  $\lambda_1 = 360 \text{ nm}$  e  $\lambda_2 = 830 \text{ nm}$

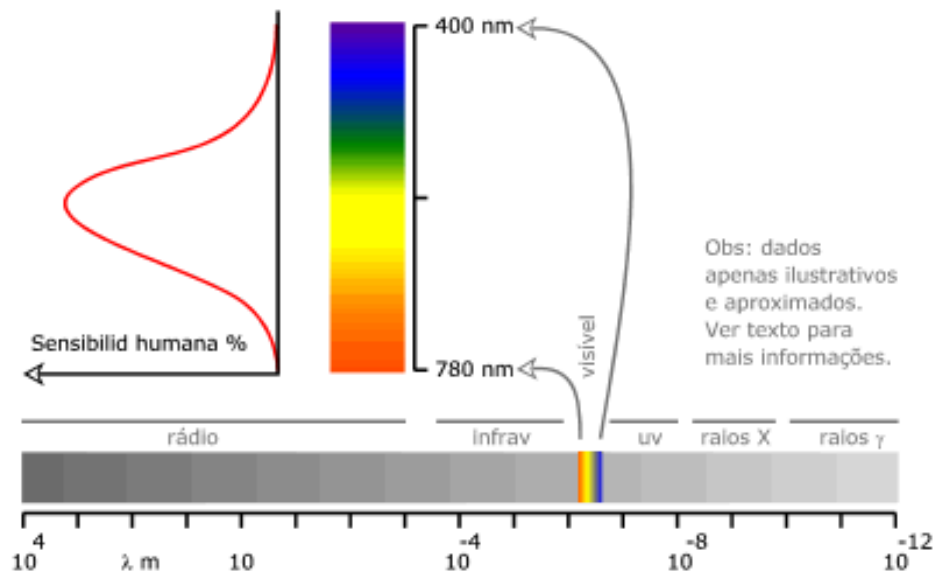


Espectro da radiação (ondas electromagnéticas)

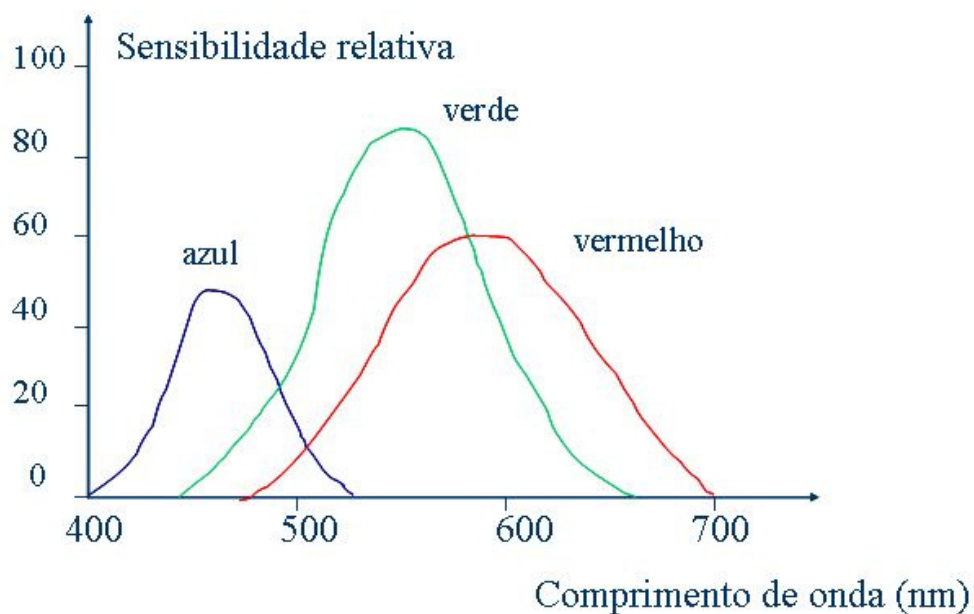


**Sensibilidade visual:**  
(efeito de Purkinje)

- forte iluminação (**visão fotópica**) :  $\lambda_m = 555 \text{ nm}$  (luminância visual  $> 10 \text{ cd.m}^{-2}$ )  
células cónicas da retina, sensação de cor
- visão mesópica
- fraca iluminação (**visão escotópica**) :  $\lambda_m' = 507 \text{ nm}$  (luminância visual  $< 0,1 \text{ cd.m}^{-2}$ )  
células cilíndricas da retina (bastonetes)



Sensibilidade acumulada (visão fotópica).

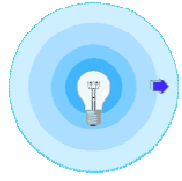
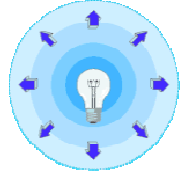
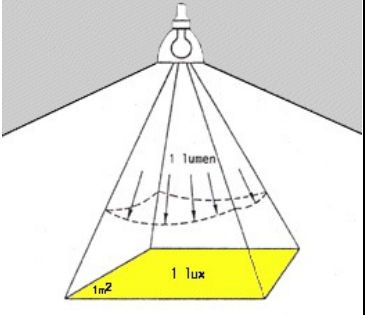


Sensibilidade relativa para às três cores básicas (visão fotópica).

## Grandezas relacionadas com a luz (radiação electromagnética)

| NOME                     | SÍMBOLO            | DEFINIÇÃO SUMÁRIA                                                                                                                                                      |
|--------------------------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| intensidade luminosa     | I ou $I_v$         | luz emitida por uma fonte luminosa num sr.                                                                                                                             |
| fluxo luminoso           | $\Phi$ ou $\Phi_v$ | produto da intensidade luminosa pelo ângulo sólido, no caso em que a fonte luminosa é pontual e uniforme.                                                              |
| iluminação (iluminância) | E ou $E_v$         | fluxo luminoso recebido pela unidade de superfície colocada perpendicularmente à luz incidente.                                                                        |
| luminância (brilho)      | L ou $L_v$         | razão entre a intensidade luminosa emitida, numa dada direcção, por um elemento de superfície emissora e a área aparente desse elemento de superfície, nessa direcção. |

A unidade S.I. da intensidade luminosa é a **Candela**. É a intensidade luminosa, numa dada direcção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência  $540 \times 10^{12}$  Hz ( $\lambda = 555$  nm) e cuja intensidade energética nessa direcção é  $1/683$  W.sr<sup>-1</sup>. (1979).

| Grandeza               | Unidade S.I.                           | Esquema                                                                              |
|------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| intensidade luminosa   | candela (cd)                           |   |
| fluxo luminoso (total) | lúmen (lm)<br>(lm = cd.sr)             |  |
| iluminância            | lux (lx)<br>(lx = lm.m <sup>-2</sup> ) |  |
| luminância (brilho)    | cd.m <sup>-2</sup>                     |  |

| Grandeza                                                       | Definição                                                                                                     | Unidade   | Expressão                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>contraste (C)</b>                                           | é a diferença de luminância entre o objecto e o fundo, em relação à luminância do próprio fundo.              | (não tem) | $C = (L2 - L1) / L1$                                                                        |
| <b>reflectância (p)<br/>(factor de reflexão)<br/>ou albedo</b> | é a relação da iluminação que uma superfície reflecte (luminância) em relação com a que recebe (iluminância). | %         | A = iluminação reflectida /<br>iluminância incidente<br><br>A = luminância /<br>iluminância |

Da definição de uma **candela** ( $1/683 \text{ W.sr}^{-1}$ ), para todo o espaço envolvente à fonte, que subentende um ângulo sólido de  $4\pi \text{ sr} = 12,56637061.. \text{ sr}$ , vem que a potência total emitida por uma fonte de 1 cd é  $0,018398785.. \text{ W (J.s}^{-1}\text{)}$

### Quantas cd vale o nosso Sol ?

Sabemos que em cada  $\text{m}^2$  perpendicular ao sol, no topo da atmosfera terrestre a potência recebida é 1367 W (valor da constante solar). À distância de  $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$  (Sol-Terra), a área total dessa esfera é de  $2,827 \times 10^{23} \text{ m}^2$  (e em cada um desses  $\text{m}^2$  temos 1367 W). Logo a potência total do Sol é  $3,865 \times 10^{26} \text{ W}$  e como  $1 \text{ cd} \approx 0,0184 \text{ W}$  isso equivale a um valor total de  **$2,1 \times 10^{28} \text{ cd}$**

### - Algumas equivalências e valores característicos:

1 cd (vela)  $\approx 12,566 \text{ lm}$ ,

1 lux = 1 lúmen por metro quadrado,

1 lâmpada incandescente de 100 W, numa superfície de  $10 \text{ m}^2 = 100 \text{ lux}$  (distância de 89 cm e eficiência luminosa de 10 lm/W),

Luz do luar = 1 lux =  $1 \text{ lm.m}^{-2} = 0,080 \text{ cd}$ ,

Vela a 31,5 cm de distância = 10 lux,

Vela a 10 cm de distância = 100 lux,

Isqueiro a 30 cm de distância = 15 lux,

Flash comum a 1 metro de distância = 250 lux,

Dia claro, uma hora após o pôr-do-sol = 1000 lux,

Dia nublado, uma hora depois do nascer do Sol = 2000 lux,

Reflectores de uma sala cirúrgica = 10.000 lux,

Dia nublado às 10 horas da manhã = 25.000 lux,

Luz do Sol em dia claro = 100.000 lux.