Capítulo 4 – Trabalho e Energia

4.1 Impulso

Resolvendo a equação fundamental da dinâmica, para uma partícula;

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{4.1}$$

conhecendo a força $\vec{F}$ em função do tempo, por integração, temos;

$$\int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt \tag{4.2}$$

ou

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \vec{I} \tag{4.3}$$

A $\vec{I}$ chamamos de ***Impulso***, e que significo seguinte,

"a variação da quantidade de movimento de uma partícula é igual ao Impulso"

Como o impulso é a força multiplicada pelo tempo, a variação na quantidade de movimento de uma qualquer partícula ou corpo de massa *m*, pode ser obtida pela aplicação de uma força intensa num curto intervalo de tempo ou por uma força menos intensa num maior intervalo de tempo. Por exemplo, a colisão entre dois asteróides implica numa variação muito rápida nas suas quantidades de movimento, mas essa mesma variação de quantidade de movimento, pode ocorrer em ambos, pela diminuta (mas constante) pressão da radiação solar, durante um longo período de tempo.

Da análise das anteriores expressões, verificamos que podemos obter a posição $\vec{r}$ da partícula em função do tempo, fazendo simplesmente;

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{I} \qquad \text{ou} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{I}}{m} \tag{4.4}$$

e como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, ($d\vec{r} = \vec{v}dt$)

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_0 + \frac{\vec{I}}{m} \right) dt \qquad \text{ou} \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \vec{I}\,dt \tag{4.5}$$

Teríamos assim resolvido o problema formal da dinâmica…

Mas normalmente a força aplicada sobre uma partícula não é apenas função do tempo, mas varia também no espaço (com a posição), varia com *x, y* e *z*, isto é, a força é uma função espácio-temporal, $\vec{F}(x, y, z, t)$.

Temos de recorrer a outras técnicas matemáticas, para as resoluções dos problemas, o que nos conduz à introdução e definição de novos conceitos físicos: o ***trabalho*** *e a* ***energia***.

4.2 Trabalho

Consideremos a partícula *A*, que se move ao longo de uma trajectória (curva) *C*, sob a acção de uma força $\vec{F}$. Num curto intervalo de tempo *dt*, a partícula move-se de *A* para *A*', efectuando um deslocamento $\overrightarrow{AA'} = d\vec{r}$. O ***trabalho* elementar** (*dW*) realizado pela força $\vec{F}$ durante o deslocamento é definido pelo produto escalar (produto interno):

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \tag{4.6}$$

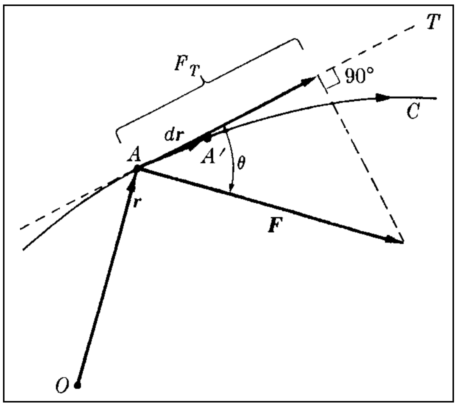


Figura 4.1 – Trabalho elementar de uma força.

Se indicarmos o módulo de $d\vec{r}$ (a distância percorrida) por *ds*, podemos então escrever o trabalho elementar *dW* na forma;

$$dW = Fds\cos\theta \tag{4.7}$$

sendo θ o ângulo existente entre as direcções da força $\vec{F}$ e do deslocamento $d\vec{r}$. Da análise da figura 4.1, vemos que $F\cos\theta$ é a componente tangencial da força ao longo da trajectória. Podemos então escrever;

$$dW = F_T ds \tag{4.8}$$

"o trabalho é igual ao produto do deslocamento pela componente da força na direcção do deslocamento"

De notar que se força é perpendicular ao deslocamento (θ = 90º), o trabalho por ela realizado é nulo. São exemplos disso, os casos das forças normais ($\vec{F}_N$) no movimento curvilíneo e a força da gravidade $m\vec{g}$ quando um corpo é movido num plano horizontal (figura 4.2).

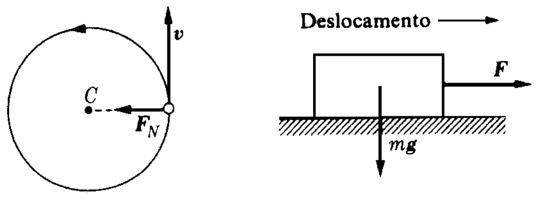


Figura 4.2 – Trabalho (nulo) de uma força perpendicular ao movimento.

A anteriores expressões dizem unicamente respeito ao trabalho elementar, isto é, a um deslocamento infinitesimal. O trabalho total de uma força sobre uma partícula, no seu transporte de A para B é a soma de todos os trabalhos infinitesimais realizados durante os sucessivos deslocamentos infinitesimais (figura 4.3), isto é;

$$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}_3 + ... \tag{4.9}$$

ou

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_T ds \qquad \textit{(integral de linha)} \tag{4.10}$$

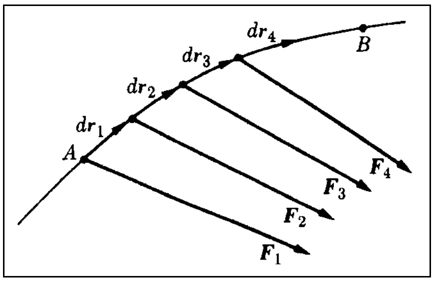


Figura 4.3 – Trabalho total (soma dos inúmeros trabalhos infinitesimais).

É muitas vezes conveniente a representação gráfica da força em função do deslocamento. A área sob a função é a medida do trabalho realizado pela força no respectivo deslocamento (figura 4.4 a).

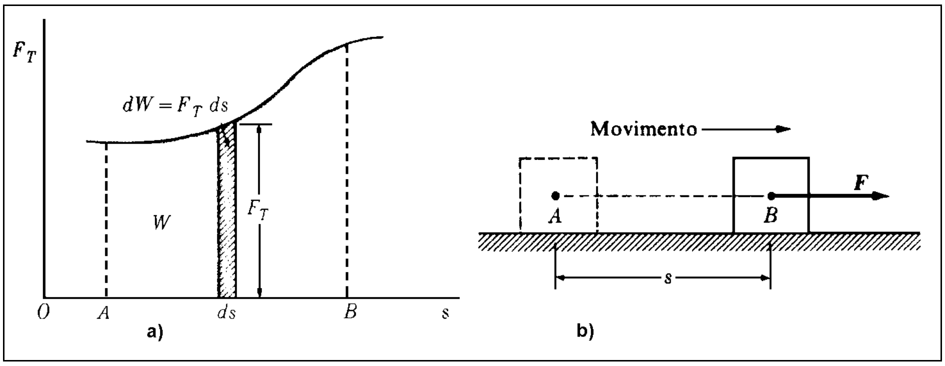


Figura 4.4 – a) Representação da força versus deslocamento.
b) Trabalho de uma força constante.

O caso particular da força ser constante em módulo, direcção e sentido, aplicado a uma partícula com movimento rectilíneo na direcção da força (figura 4.4 b), dá-nos:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_T ds = \int_A^B F ds = F \int_A^B ds = Fs \tag{4.11}$$

neste caso o trabalho realizado pela força é simplesmente o produto da força pela distância percorrida (o produto da força pelo deslocamento efectuado).

Quando a partícula está sujeita a várias forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... , o trabalho total (soma dos trabalhos realizados por cada uma) é igual ao trabalho realizado pela força resultante (soma de todas as forças aplicadas), (figura 4.5).

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 + . = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} + . = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + .) \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.12)$$

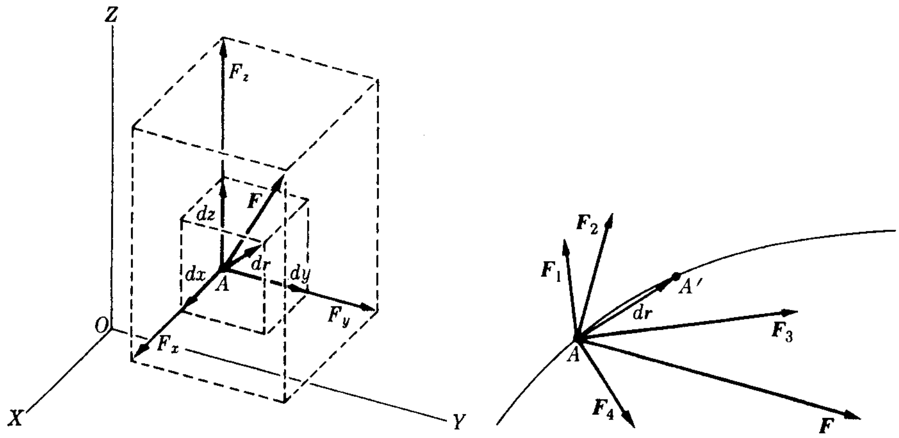


Figura 4.5 – Trabalho total, das componentes ou de várias forças aplicadas.

4.2.1 Potência

Nas aplicações práticas, nomeadamente em engenharia de máquinas é importante conhecer a rapidez com que o trabalho é feito. A ***potência instantânea*** é definida por:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad \textbf{\textit{potência média}} \qquad P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (4.13)$$

4.2.2 Unidades de Trabalho e Potência

O **trabalho** é expresso como o produto de uma unidade de força por uma unidade de distância. Vem por isso em *newton* × *metro* (N m), uma unidade a que chamamos ***joule*** (J)[1]. Um joule é assim o trabalho realizado por uma força de um newton quando ela desloca por um metro uma partícula na mesma direcção da força. J = N m = kg m^2 s^{-2}

A **potência** é expressa como o quociente entre uma unidade de trabalho e uma unidade de tempo. Vem por isso em *joule por segundo*, uma unidade chamada ***watt*** (W).
Um watt é a potência de uma máquina que realiza trabalho com a rapidez de um joule a cada segundo. (W = kg m^2 s^{-3})

São usados também múltiplos do ***watt***, kW = 10^3 W e MW = 10^6 W
O *horse-power* (hp) ou cavalo-vapor (cv) = 746 W

[1] James Prescott Joule, (1816-1869). Cientista Britânico, investigador na área da termodinâmica.

Outra unidade para exprimir o ***trabalho*** é o *quilowatt-hora* . O ***quilowatt-hora*** é igual ao trabalho realizado durante uma hora por uma máquina que tem a potência de um kW. Assim, o kWh = (10^3 W)(3600 s) = 3,6 x 10^6 J

Por definição **Energia** é definida como "a capacidade de um sistema efectuar trabalho", (geralmente este conceito é melhor entendido do que definido).

4.3 Energia Cinética

A força tangencial é $F_T = m\dfrac{dv}{dt}$, portanto,

$$F_T ds = m\frac{dv}{dt}ds = mdv\frac{ds}{dt} = mvdv \tag{4.14}$$

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{4.15}$$

Este resultado indica que, independentemente da forma funcional da força $\vec{F}$ e da trajectória seguida pela partícula, o valor do trabalho W realizado pela força é sempre igual à variação da quantidade de $mv^2/2$, entre o fim e o início da trajectória. Esta importante quantidade, chamada de ***energia cinética***, é designada por $\boldsymbol{E_C}$.

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \qquad\qquad E_C = \frac{p^2}{2m} \tag{4.16}$$

"o trabalho realizado sobre uma partícula pela força resultante é igual à variação da sua energia cinética"

4.4 Energia Potencial. Forças Conservativas

Uma força é dita conservativa quando a sua dependência com o vector-posição $\vec{r}$ ou com as suas coordenadas *x, y, z* da partícula é tal que o trabalho W pode ser sempre expresso como a diferença entre valores de uma quantidade E_P(x,y,z) nos pontos inicial e final. A quantidade $\boldsymbol{E_P}$**(x,y,z)** é chamada ***Energia Potencial*** e é função das coordenadas da partícula.

Então se $\vec{F}$ é uma *Força Conservativa*,

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B) \tag{4.17}$$

isto é o trabalho realizado é igual a E_p no ponto de partida menos E_p no ponto final.

"Energia Potencial é uma função das coordenadas tal que a diferença entre os seus valores na posição inicial e na posição final é igual ao Trabalho realizado sobre a partícula para move-la da posição inicial até à posição final"

Rigorosamente, a Energia Potencial E_p deveria depender das coordenadas da partícula considerada e também das coordenadas de todas as outras partículas do Universo, que interagem com ela. Mas sendo uma realização impossível e como já dissemos, no estudo dinâmico de uma partícula, consideramos o resto do Universo essencialmente fixo. Somente consideramos as coordenadas da partícula em estudo, na E_p.

Enquanto a Energia Cinética tem sempre a mesma forma e é sempre válida, a forma da função Energia Potencial $E_P(x,y,z)$ depende da natureza da força $\vec{F}$, e nem todas as forças satisfazem a expressão anterior. Somente as que a satisfazem são chamadas de ***Forças Conservativas*.**

A *Força da Gravidade* é *Conservativa*, e a sua *Energia Potencial* devida à gravidade é:

$$E_{pg} = mgh \tag{4.18}$$

(perto da superfície da Terra).

A *Energia Potencial* correspondente a uma *Força Constante* é (da expressão 4.17):

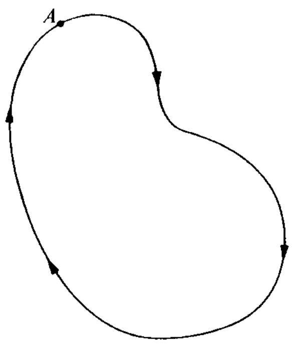
$$E_p = -\vec{F} \cdot \vec{r} \tag{4.19}$$

A *Energia Potencial* é sempre definida a menos de uma constante arbitrária, por exemplo; $E_{pg} = mgh + C^{te}$. Devido a esta arbitrariedade, podemos definir o zero, ou nível de referência da *Energia Potencial*, da maneira que mais nos convenha.

Nos problemas de corpos em movimento junto à superfície da Terra, é usual tomarmos esta superfície como nível de referência, e assim sendo a *Energia Potencial* devida à gravidade é zero na superfície da Terra. Para um satélite (natural ou artificial), o zero da *Energia Potencial* é usualmente definido a uma distância infinita.

"o Trabalho realizado por Forças Conservativas é independente da Trajectória"

Qualquer que seja a curva que una os pontos A e B, a diferença E_p(A) - E_p(B) permanece a mesma porque depende apenas das coordenadas dos pontos A e B. Em particular, se a **curva é fechada**, isto é, se o ponto final coincide com o ponto inicial (os pontos A e B são o mesmo), vem que E_p(A) = E_p(B) e o **Trabalho é zero** ($W = 0$). Isto significa que ao longo de parte da trajectória, o trabalho é positivo e ao longo da restante parte da trajectória o trabalho é negativo e de mesmo valor absoluto, dando resultado nulo (figura 4.6).



$$W_O = \int_A^{B=A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{4.20}$$

(um integral ao longo de uma linha fechada, de um vector $\vec{V}$ função da posição é chamado circulação do vector $\vec{V}$)

Figura 4.6 – Trajectória (curva) fechada.

Esta última expressão pode ser adoptada como definição de *Força Conservativa*.

A força conservativa tem de obedecer a;

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p \qquad (4.21)$$

porque então:

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B dE_p = -[E_p(B) - E_p(A)] = [E_p(A) - E_p(B)] \qquad (4.22)$$

Como $\vec{F}\cdot d\vec{r} = Fds\cos\theta$, com θ o ângulo entre a força e o deslocamento, podemos escrever;

$$F\cos\theta = -\frac{dE_p}{ds} \qquad (4.23)$$

$F\cos\theta$ é a componente da força na direcção do deslocamento ds , portanto se conhecermos $E_P(x,y,z)$, podemos obter a componente de $\vec{F}$ em qualquer direcção calculando a quantidade $-dE_p/ds$, que é o negativo da variação da *Energia Potencial* com a distância naquela direcção. Esta variação é chamada *derivada direcional* de E_P . Quando um vector é tal que a sua componente em qualquer direcção é igual à derivada direccional de uma função naquela direcção, o vector é dito ***gradiente*** da função.

Dizemos assim, que $\vec{F}$ é o gradiente negativo de E_P :

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z \qquad (4.24)$$

Se o movimento estiver contido num plano, e usarmos as coordenadas polares (r, θ), o deslocamento ao longo do raio vector $\vec{r}$ é dr e o deslocamento perpendicular ao raio vector é $rd\theta$. Consequentemente, as componentes radiais e transversais da força são:

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \qquad \text{e} \qquad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$$

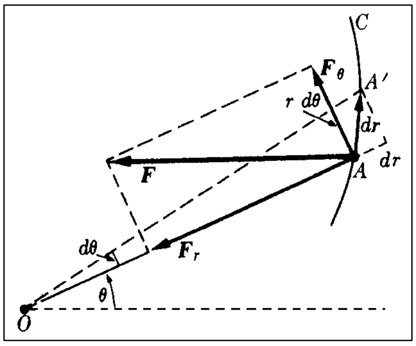


Figura 4.7 – Componentes da Força.

Um caso importante é aquele em que a Energia Potencial E_P depende da distância r mas não do ângulo θ, isto é, em vez de $E_P(r,\theta)$ temos $E_P(r)$. Então $\partial E_P/\partial\theta = 0$ e $F_\theta = 0$. A força não tem componente transversal, mas somente radial: é portanto conhecida como uma ***Força Central*** e a sua linha de acção passa sempre pelo centro. Uma Força Central depende sempre somente da distância da partícula ao centro.

"a Energia Potencial associada a uma Força Central depende somente da distância da partícula ao centro de forças e, reciprocamente, a força associada com uma Energia Potencial que depende somente da distância da partícula a uma origem é uma Força Central cuja linha de acção passa por essa origem"

4.4.1 Gradiente

Consideremos uma função *V(x,y,z)* que depende das três coordenadas de um ponto. Podemos representar as duas superfícies;

$$V(x,y,z) = C_1 \qquad \text{e} \qquad V(x,y,z) = C_2$$

A estas superfícies que exibem um determinado valor constante de potencial (neste caso as superfícies de potencial C_1 e C_2) – são chamadas de **superfícies equipotenciais**, (figura 4.8).

Ao passarmos de um ponto *A* sobre C_1 para qualquer ponto *B* sobre C_2 , a função *V* sofre uma variação C_2 - C_1 . Se C_1 e C_2 diferem por uma quantidade infinitesimal, podemos escrever $dV = C_2 - C_1$. A variação em *V* por unidade de comprimento, ou *derivada direccional* de *V* é:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{C_2 - C_1}{ds} \tag{4.25}$$

Consideremos o caso em que *A* e *B* estão ao longo de uma normal *N*, comum às duas superfícies consideradas. A derivada direccional ao longo da normal *AN* é dV/dn . Vemos que $dn = ds \cos\theta$, então:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{dV}{dn}\cos\theta$$

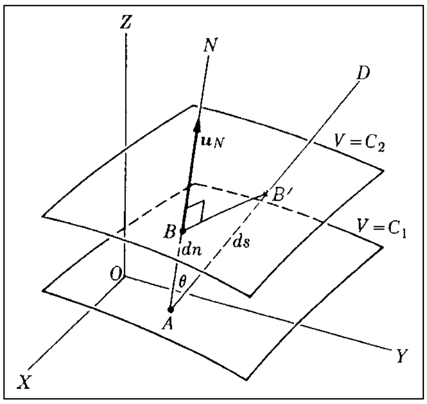


Figura 4.8 – Gradiente de uma função vectorial.

que relaciona a derivada direccional ao longo da normal, com a derivada direccional ao longo de qualquer outra direcção. Como $\cos\theta$ é máximo para $\theta = 0$, concluímos que dV/dn dá a máxima derivada direccional de *V*.

Introduzindo o vector unitário $\vec{u}_n$, perpendicular à superfície em *A*, definimos o ***gradiente de V*** por:

$$\boxed{grad\, V = \frac{dV}{dn}\vec{u}_n} \tag{4.26}$$

e assim, o ***gradiente*** é um vector perpendicular à superfície *V(x,y,z)* = C^{te} , e é igual à máxima derivada direccional de *V(x,y,z)*. Podemos então escrever:

$$\frac{dV}{ds} = \left|grad\, V\right| \cos\theta \tag{4.27}$$

mostrando que a razão de variação com o deslocamento na direcção *AD*, ou a derivada direccional de *V*(x,y,z), é igual à componente do vector grad *V* naquela direcção.

As linhas ao longo do gradiente são chamadas **linhas de força** e são por definição normais às superfícies equipotenciais.

O operador diferencial, identificado pelo símbolo ∇ (nabla) , foi introduzido para simplificar a notação,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z \qquad (4.28)$$

grad $V = \nabla\ V$

4.5 Conservação da Energia de uma partícula

Quando a força que age sobre uma partícula é conservativa, temos então que:

$$E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) \qquad (4.29)$$

ou

$$(E_c + E_p)_B = (E_c + E_p)_A \qquad (4.30)$$

A quantidade $E_c + E_p$ é chamada ***Energia Total*** da partícula e é designada por E, ou seja, a energia total de uma partícula é igual à soma das suas energias cinéticas e potencial, ou:

$$E = E_c + E_p = ½\, mv^2 + E_P(x,y,z) \qquad (4.31)$$

"quando as forças são conservativas, a Energia Total (E) da partícula permanece constante"

A *Energia da partícula é conservada*. No caso de um corpo que cai, perto da superfície da Terra, a conservação da Energia dá:

$$E = ½\, mv^2 + mgh = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \qquad (4.32)$$

E que não se restringe ao movimento vertical, é igualmente válida para o movimento de um projéctil cuja trajectória é inclinada em relação à vertical.

4.6 Força Elástica

Se considerarmos uma mola elástica ideal, sem massa, a qual após sofrer uma deformação restaura a sua forma original, observamos que as compressões (ou distensões) sofridas são proporcionais à força nela aplicada para obter essa mesma compressão (ou distensão). Assim, podemos enunciar a lei de *Hooke*[2] (1678), como;

$$\boxed{\vec{F}_{el} = -k\overrightarrow{\Delta x}} \qquad (4.33)$$

onde F_{el} é a força elástica que se verifica existir na mola, e que restaura a posição original e de equilíbrio da mesma, após esta ficar livre (figura 4.9). O coeficiente ***k*** é a chamado constante elástica da mola, cuja unidade no S.I. é Nm^{-1}.

[2] *Robert Hooke*, (1635-1703). Cientista Britânico, físico experimental.

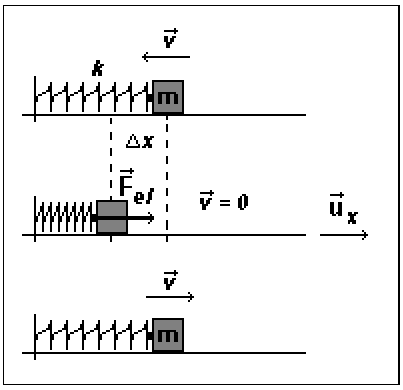


Figura 4.9 – Força elástica de uma mola de constante elástica k, comprimida de Δx.

4.6.1 Massa oscilante numa mola

Vamos continuar a considerar a não existência de qualquer força de atrito e uma massa m (já representada na figura 4.9) ligada à nossa mola elástica. Se o sistema mola e massa for afastado da posição de equilíbrio por aplicação de uma força externa, realizando um trabalho sobre ele (transferindo energia para o sistema), então essa energia adquirida vai permanecer constante e a sistema irá oscilar indefinidamente no tempo entre $+\ \Delta x$ e $-\ \Delta x$.

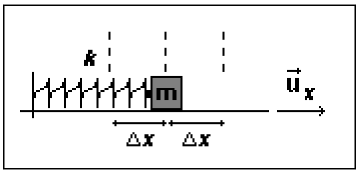


Figura 4.10 – Sistema - mola elástica e massa oscilante.

Como a força elástica da mola está aplicada na massa m, pela lei de *Hooke* (4.33) e lei fundamental da dinâmica (capitulo 3, expressão 3.80), temos;

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{x} = m\vec{a} \tag{4.34}$$

como o movimento ocorre apenas a uma dimensão (no eixo dos xx), podemos passar a escrever;

$$-kx = ma \tag{4.35}$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0} \tag{4.36}$$

que é a equação (diferencial) do movimento de uma massa oscilante.

4.6.2 Energia Potencial Elástica

Da definição de energia potencial (4.24), temos então que $F_{el}(x) = -\frac{dE_{Pel}(x)}{dx}$ e $F_{el}(x)\,dx = -dE_{Pel}(x)$. Integrando em *x*, vamos obter a função Energia Potencial Elástica.

$$\int_{x_0}^{x} F_{el}(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} dE_{Pel}(x) = E_{Pel}(x_0) - E_{Pel}(x)$$

$$E_{Pel}(x) = E_{Pel}(x_0) - \int_{x_0}^{x} F_{el}(x)\,dx$$

Se considerarmos x_0 = 0 m (posição de equilíbrio da mola), vem;

$$E_{Pel}(x) = E_{Pel}(0) - \int_{0}^{x} (-kx)\,dx$$

Se considerarmos ainda que E_{Pel} = 0 J (a força elástica é nula em x_0 = 0 m), vem;

$$\boxed{E_{Pel}(x) = \frac{1}{2}kx^2} \tag{4.37}$$

Para uma massa (*m*) oscilante numa mola de constante elástica (*k*) e aplicando o princípio de conservação da energia mecânica, temos;

$$E_{Pel\,máx} = E_{c\,máx} \iff \frac{1}{2}kx_{máx}^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \tag{4.38}$$

onde $x_{máx}$ é a compressão (ou distensão) máxima da mola, v_{max} a velocidade máxima da massa, e $x_{máx} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0$

A figura 4.11 representa, para o sistema em estudo, a energia potencial elástica e cinética, ao longo da oscilação entre os extremos – A e + A. Quando a energia potencial elástica é máxima a energia cinética é mínima (zero) e vice-versa. Esse valor máximo de energia é dado por (4.38).

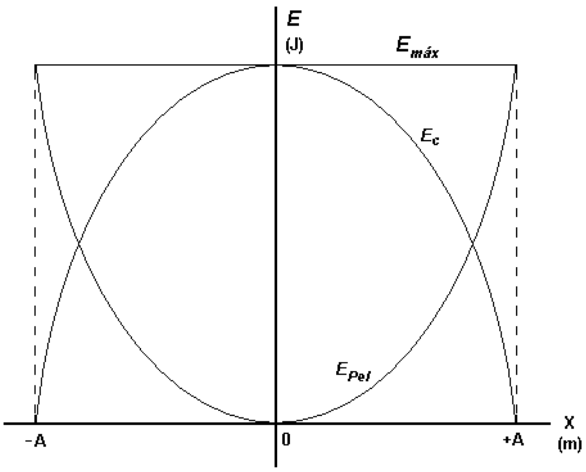


Figura 4.11 – Variação de energia cinética e potencial elástica, num sistema oscilante.