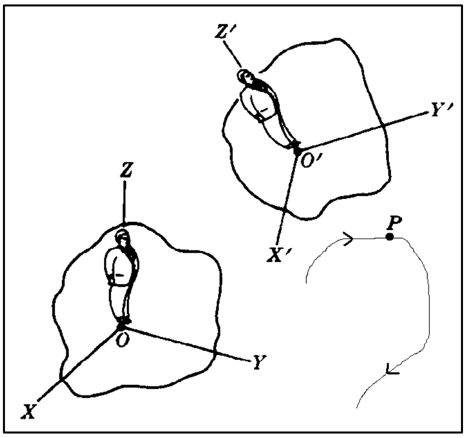
Capítulo 3 – Cinemática e Dinâmica do ponto material. Corpo Rígido.

3.1 Movimento Relativo

Um ponto (um objecto) exibe um movimento em relação a outro, quando a sua posição espacial medida relativamente a esse segundo corpo - **varia com o tempo**.

Quando isto não acontece, diz-se que o ponto está em - **repouso relativo** – a esse objecto.

Repouso e **movimento** como conceitos **relativos** - <u>dependem da escolha do referencial</u>, não são conceitos absolutos.



Quando estudamos os problemas do movimento, temos sempre que definir um **sistema de referência** ou **referencial**, para que não tenhamos dúvidas sobre a sua trajectória (medida nesse referencial.).

Figura 3.1 – Dois observadores (dois referenciais distintos) estudam o movimento de *P* no espaço.

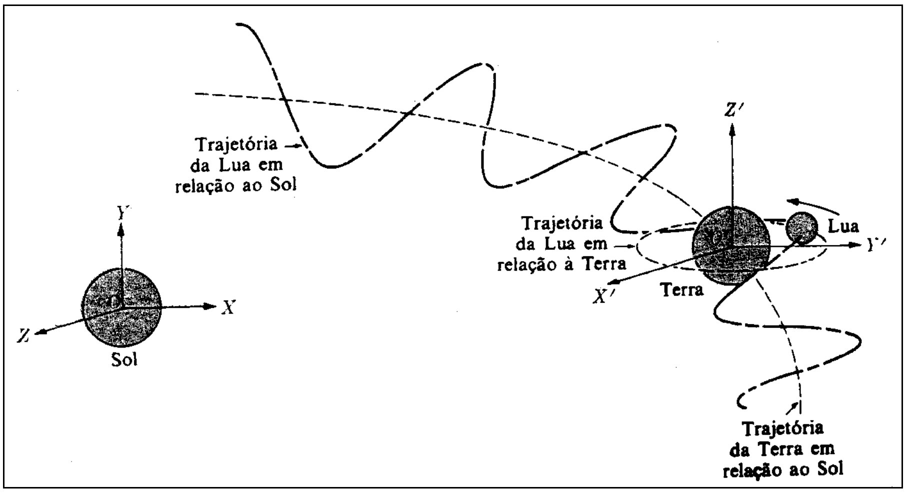


Figura 3.2 – Representação da orbita da Lua relativamente à Terra e ao Sol.
As distâncias e a trajectória da Lua não estão à escala.
(a distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes superior à distância Terra-Lua).

3.2 Movimento Rectilíneo

3.2.1 Velocidade

O movimento de um ponto material **é rectilíneo** quando a sua trajectória é uma **recta**.

Considerando o movimento a uma dimensão (ao longo do eixo do XX), a posição de um ponto é definida pelo seu deslocamento *x* medido a partir de um ponto arbitrário O, a origem.

Podemos relacionar a posição com o tempo e assim obter uma **relação funcional :** $x = f(t)$

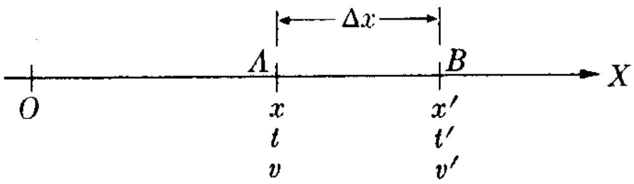


Figura 3.3 – Duas sucessivas posições de um ponto, no tempo e no espaço.

Ocupando o corpo distintas posições (obviamente em distintos tempos), podemos definir a ***velocidade média*** entre esses dois pontos (e instantes) como,

$$v_{med} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3.1}$$

Velocidade média - durante um determinado intervalo de tempo Δt
é igual ao deslocamento médio Δx por <u>unidade de tempo</u> , durante o intervalo de tempo

Velocidade Instantânea (num ponto) - toma-se o intervalo de tempo Δt tão pequeno quanto possível, ou seja, toma-se o valor limite quando Δt tende para zero (0).

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3.2}$$

Isto não é mais do que tomar a derivada de *x* em relação ao tempo *t*; vindo,

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \tag{3.3}$$

A **Velocidade Instantânea** é obtida pelo cálculo da derivada do deslocamento, em relação ao tempo. (Na prática, nos nossos instrumentos é sempre num pequeno intervalo de tempo, e portanto, não uma medição instantânea).

Sabendo $\boldsymbol{v = f(t)}$ - a posição *x* pode ser obtida por integração, pois $\boldsymbol{dx = v\,dt}$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v dt = x - x_o \qquad \text{e} \qquad x = x_o + \int_{t_0}^{t} v dt \tag{3.4}$$

$v dt$ - que tem a grandeza de um comprimento é o deslocamento do corpo durante o pequeno intervalo de tempo *dt*.

Exemplo de aplicação - Velocidade média *versus* Velocidade instantânea
Uma partícula move-se ao longo do eixo XX de tal modo que a sua posição em qualquer instante é dada pela função $x(t) = 5t^2 + 1$ (com x dado em metro e t em segundo - S.I.).

Calcular a velocidade média nos seguintes intervalos de tempo:
[2, 3] s [2, 2,1] s [2, 2,001] s [2, 2,0001] s
Calcular agora a velocidade instantânea no instante $t = 2$ s .
Comparar os resultados e verificar a relação entre as *duas velocidades*.

3.2.1 Aceleração

Regra geral a velocidade de um corpo é função do tempo. Quando não, e a velocidade é constante (invariável no tempo) - ***o movimento é dito uniforme***.

Se as velocidade foram distintas (v em t e v' em t' - na figura 3.3) podemos então definir a **aceleração média** (entre os pontos A e B), como:

$$a_{med} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3.5}$$

com Δv a variação de velocidade $(v'-v)$ e Δt o tempo decorrido $(t'-t)$.

Aceleração média - durante um determinado intervalo de tempo Δt
é a variação da velocidade Δv por unidade de tempo , durante o intervalo de tempo

Aceleração Instantânea - é o valor limite da aceleração média, quanto o intervalo de tempo Δt tende para zero (0).

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3.6}$$

é a derivada de v em relação ao tempo t; isto é;

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \tag{3.7}$$

Mas em geral, a aceleração varia durante o movimento. Um movimento rectilíneo com aceleração (tangencial) constante é dito ***uniformemente acelerado***.

- se a velocidade aumenta (em módulo) temos um movimento acelerado,
- se a velocidade diminui (em módulo) temos um movimento retardado.

A partir da aceleração podemos calcular a velocidade por integração (***dv = a dt***),

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt = v - v_o \qquad v = v_o + \int_{t_0}^{t} a dt \tag{3.8}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \qquad a = \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{3.9}$$

ou seja, de $dv = a\,dt$, vem que $v\,dv = a\,dx$, vindo,

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a dx \qquad \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^{\,2} = \int_{x_0}^{x} a dx \tag{3.10}$$

[aplicação dos conhecimentos de derivadas e primitivas de funções polinomiais]

3.2A Movimento Rectilíneo Uniforme

Como v é constante, $a = 0$ ms^{-2} , e

$$x = x_o + \int_{t_0}^{t} v dt = x_o + v\int_{t_0}^{t} dt = x_o + v(t - t_0) \tag{3.11}$$

$$\boxed{x = x_o + v(t - t_0)} \tag{3.12}$$

expressão do movimento rectilíneo uniforme, a uma dimensão

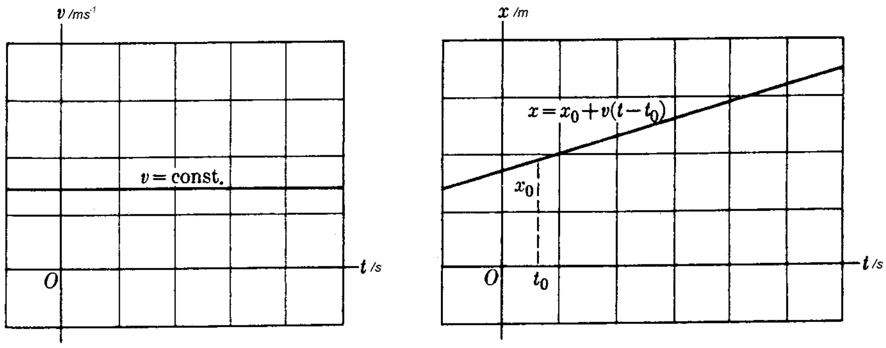


Figura 3.4 – Gráficos com as representações da função velocidade e deslocamento, no movimento uniforme.

3.2B Movimento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

Neste caso a aceleração a é constante.

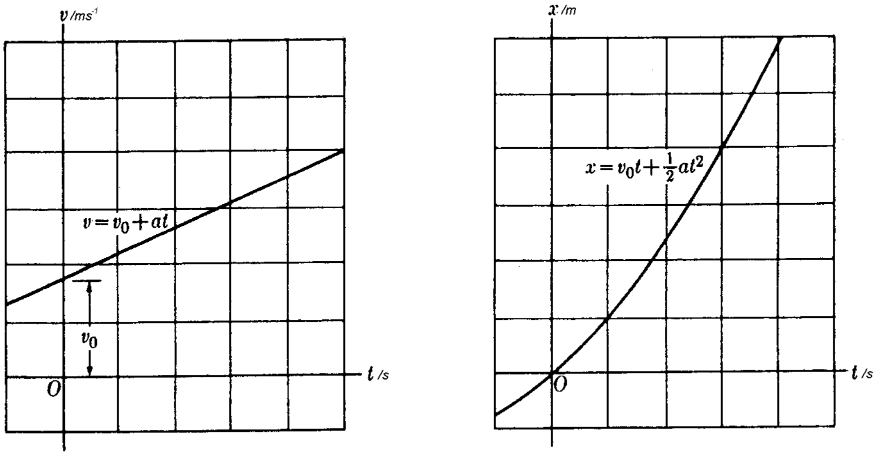
$$v(t) = v_o + \int_{t_0}^{t} a dt = v_o + a\int_{t_0}^{t} dt = v_o + a(t - t_0) \tag{3.13}$$

$$x(t) = x_o + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt = x_0 + v_0\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt \tag{3.14}$$

$$\boxed{x(t) = x_o + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2} \tag{3.15}$$

expressão do movimento rectilíneo uniformemente acelerado, a uma dimensão

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^{\,2} = a\int_{x_0}^{x} dx = a(x - x_0) \qquad \text{o que dá:} \qquad \boxed{v^2 = v_0^{\,2} + 2a(x - x_0)} \tag{3.16}$$



(considerando $t_0 = 0$ s)

Figura 3.5 – Gráficos com as representações da função velocidade e deslocamento, no movimento uniformemente acelerado.

A queda de qualquer corpo na proximidade da superfície da Terra é (em primeira análise) um exemplo típico de um movimento rectilíneo uniformemente acelerado. A aceleração da gravidade perto da superfície da Terrestre é, em primeira aproximação, constante em intensidade e define o nosso sentido de vertical.

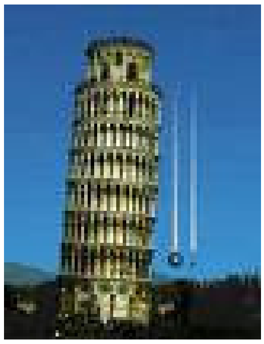


Figura 3.6 – Queda de graves.

3.3 Movimento Curvilíneo

3.3.1 Velocidade

Consideremos uma partícula a descrever uma **trajectória curvilínea *C***, como ilustrado na figura 3.7.

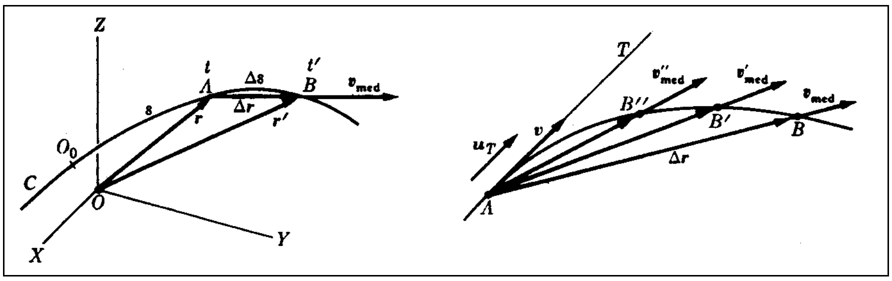


Figura 3.7 – Representação de uma trajectória curvilínea *C*.
Sucessivas posições e velocidades médias.

No instante ***t***, a partícula ocupa o ponto ***A***, expresso pelo vector posição $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$.

Num instante posterior ***t'***, a partícula ocupa o ponto ***B***, com $\vec{r}\,' = \overrightarrow{OB} = x'\,\vec{u}_x + y'\,\vec{u}_y + z'\,\vec{u}_z$.

O movimento ocorre ao longo do arco AB = Δs, sendo o deslocamento o vector $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$ ($\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$),

vindo; $\overrightarrow{AB} = \Delta x\,\vec{u}_x + \Delta y\,\vec{u}_y + \Delta z\,\vec{u}_z$ ($\Delta x = x' - x,\ \Delta y = y' - y\ \ e\ \ \Delta z = z' - z$)

logo, $$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{u}_z \tag{3.17}$$

a velocidade média é representada por um vector paralelo ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$.

Para o cálculo da velocidade instantânea, tomamos Δt tão pequeno quanto possível, ou seja toma-se (como já vimos) o valor limite quando Δt tende para zero;

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \tag{3.18}$$

Quando o ponto ***B*** tende para o ponto ***A***, o vector $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$ coincide com a direcção tangencial AT (versor $\vec{u}_T$).

No **movimento curvilíneo** a **velocidade instantânea** é um **vector tangente à trajectória**, dado por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \tag{3.19}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt}\ \text{ e }\ v_z = \frac{dz}{dt}, \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.20}$$

Podemos obter o mesmo resultado, usando um ponto arbitrário sobre a trajectória (O_0), assim $s = O_0A$ dá-nos a posição da partícula medida pelo deslocamento ao longo da curva (trajectória).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \tag{3.21}$$

$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ é um vector unitário com direcção tangencial à trajectória (no ponto A),

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_T \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{3.22}$$

ou seja, podemos reescrever a **velocidade instantânea** como:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\,\vec{u}_T} \tag{3.23}$$

3.3.2 Aceleração

Neste tipo de movimento (curvilíneo), a velocidade, varia tanto em módulo como em direcção.

- variação de módulo: aumento ou diminuição da velocidade
- variação de direcção: porque a velocidade é tangente à curva (trajectória)

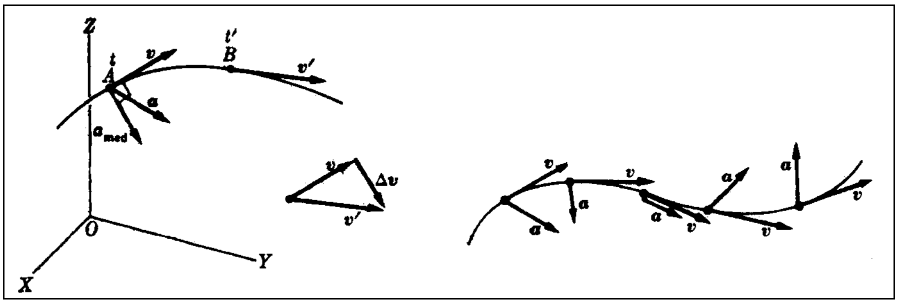


Figura 3.8 – Representação de uma trajectória curvilínea e variação da velocidade instantânea.

No instante ***t***, a partícula ocupa o ponto ***A***, e no instante posterior ***t'***, a partícula ocupa o ponto ***B***, sendo a variação de velocidade entre esses instantes expressa (no triângulo) por $\Delta\vec{v}$, $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ e $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$,

logo a aceleração média em Δt é o vector:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} \tag{3.24}$$

que é paralelo ao vector $\Delta\vec{v}$

Da mesma forma que para a velocidade, temos as relações semelhantes:

$$\vec{v} = v_x\,\vec{u}_x + v_y\,\vec{u}_y + v_z\,\vec{u}_z \qquad (\Delta\vec{v} = \Delta v_x\,\vec{u}_x + \Delta v_y\,\vec{u}_y + \Delta v_z\,\vec{u}_z) \tag{3.25}$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{u}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{u}_z \tag{3.26}$$

3.3.3 Aceleração instantânea

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} \tag{3.27}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \tag{3.28}$$

A aceleração é um vector que tem a direcção da variação instantânea da velocidade, e como esta varia na direcção da curvatura da trajectória, <u>a aceleração é sempre dirigida para a concavidade da curva.</u>

Podemos então definir a aceleração como:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{3.29}$$

com componentes: $$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2}\ e\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.30}$$

e módulo $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

3.3.4 Movimento curvilíneo com aceleração constante

De especial importância é o caso de termos a aceleração constante em módulo e direcção.
Se $\vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$, (de $d\vec{v} = \vec{a}dt$) temos;

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt = \vec{a}(t - t_0) \tag{3.31}$$

e como,

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 \tag{3.32}$$

vem que,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \tag{3.33}$$

mas sabendo que $d\vec{r} = \vec{v}dt$, logo chegamos a:

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0))dt = \vec{v}_0\int_{t_0}^{t} dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt \tag{3.34}$$

e como

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \tag{3.35}$$

vem então: $$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2} \tag{3.36}$$

expressão vectorial do movimento curvilíneo com aceleração constante

- a velocidade $\vec{v}_0$ e a aceleração $\vec{a}$ podem ter direcções diferentes,
- mas, a velocidade $\vec{v}_0$ e a aceleração $\vec{a}$ estão sempre contidas no mesmo plano,
- o vector $\vec{r}$ está sempre contido nesse plano,

Concluímos que um movimento com aceleração constante é sempre plano e que a sua trajectória é uma parábola (um arco de parábola)

A aplicação mais imediata deste resultado ocorre no estudo do movimento de corpos perto da superfície terrestre, onde podemos considerar a aceleração (na direcção vertical) constante e igual a $g = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$.

Definindo o plano XY, onde existem a $\vec{v}_0$ e $\vec{a} = \vec{g}$ $(\vec{g} = -g\,\vec{u}_y)$

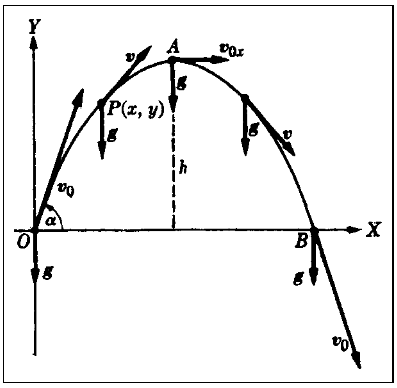


Figura 3.9 – Representação de uma trajectória curvilínea a duas dimensões.

Podemos escrever $\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{u}_x + v_{oy}\vec{u}_y$

Com as componentes iniciais da velocidade: $v_{ox} = v_o \cos\alpha$ e $v_{oy} = v_o sen\alpha$

Tomando $t_0 = 0$ s , vem:

$$\boxed{\vec{v} = v_{ox}\vec{u}_x + (v_{oy} - gt)\vec{u}_y} \qquad (3.37)$$

expressão vectorial da velocidade

- a componente da velocidade segundo a direcção XX permanece constante (pois a não existe aceleração segundo essa componente)

Considerando que o corpo se encontra na origem do referencial em $\boldsymbol{t_0} = 0$ s $(\vec{r}_0 = \vec{0})$, podemos também escrever;

$$\boxed{\vec{r} = v_{ox}t\,\vec{u}_x + (v_{oy}t - \tfrac{1}{2}gt^2)\vec{u}_y} \qquad (3.38)$$

expressão vectorial da posição

ou, analisando as componentes; $x = v_{ox}t$ e $y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$, que representam as coordenadas do corpo ao longo do tempo (em função do tempo).

Tempo necessário para o corpo atingir o ponto mais alto da trajectória

Condição para atingir o ponto mais alto da trajectória: $v_y = 0$ ms^{-1}

Vem então como solução: $t_s = \dfrac{v_0 sen\alpha}{g}$ s (3.39)

A correspondente altitude máxima acima do ponto de lançamento, será:

$$h_{max} = \frac{v_0{}^2 sen^2\alpha}{2g} \text{ m} \qquad (3.40)$$

Tempo necessário para o corpo voltar ao nível do lançamento

Tempo de voo t_{voo} é igual ao dobro do t_s e o correspondente alcance máximo é:

$$D_{\max} = v_{ox} \frac{2v_0 sen\alpha}{g} = \frac{v_0^{\,2} sen2\alpha}{g} \quad \text{m} \tag{3.41}$$

O valor que majora o alcance máximo ocorre para um ângulo de lançamento $\alpha = 45°$

A equação da trajectória do corpo é obtida eliminando o tempo t na equação (3.38), o que dá:

$$\boxed{y = -\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha} x^2 + x\,tg\alpha} \tag{3.42}$$

Equação que representa a trajectória - uma parábola (com concavidade voltada para baixo)

Estes resultados só são válidos como uma aproximação, quando:

1. o alcance máximo é suficientemente pequeno para que possamos desprezar a curvatura do nosso planeta Terra,

2. a altitude é suficientemente pequena para que a variação da gravidade com a altura possa ser desprezada (variação em módulo e direcção),

3. a velocidade inicial é suficientemente pequena para que se possa desprezar a resistência (atrito) do ar.

Exemplo:

É disparado um projéctil com velocidade inicial $|\vec{v}_0| = 200\ \text{ms}^{-1}$, fazendo um ângulo de lançamento de 40° com a horizontal. Achar a velocidade e a posição do projéctil aos 20 s . Achar também o alcance máximo e o tempo necessário para o projéctil atingir o solo.

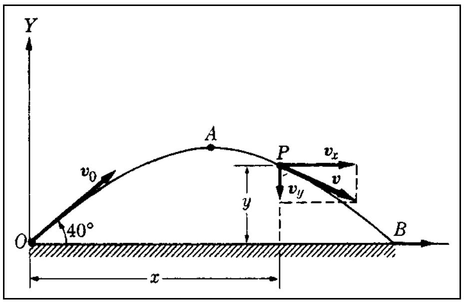


Figura 3.10 – Lançamento de um projéctil.

Solução:

$\vec{v}(20) = 153{,}2\,\vec{u}_x - 67{,}4\,\vec{u}_y$ ms^{-1} $\quad\quad$ $\vec{r}(20) = 3064\,\vec{u}_x - 612\,\vec{u}_y$ m

altura máxima = 843,7 m , $\quad\quad$ alcance máximo = 4021 m , no instante t = 26,24 s

3.3.5 Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Vamos considerar que no instante t , a partícula se encontra no ponto A, com velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$. Como sabemos que a aceleração está sempre dirigida para a concavidade da trajectória, a sua decomposição segundo uma componente tangencial $\vec{a}_T$ - paralela à tangente AT - é denominada **aceleração tangencial.** A componente normal $\vec{a}_N$ - paralela à normal AN (perpendicular a AT) - é denominada **aceleração normal.**

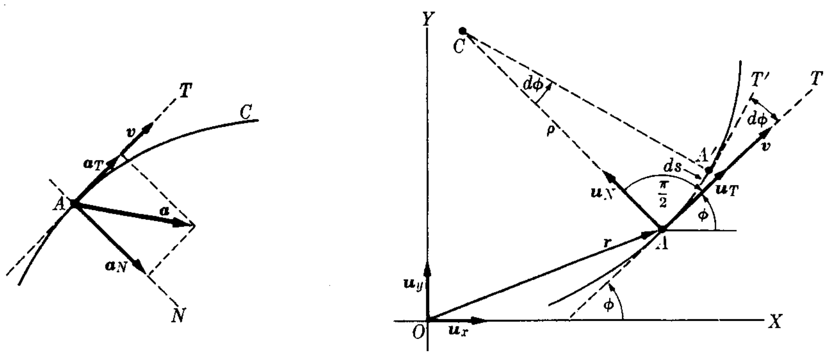


Figura 3.11 – Componentes da aceleração no movimento curvilíneo.

Cada uma destas componentes tem um significado físico bem definido:

Variação no módulo da velocidade : aceleração tangencial

Variação na direcção da velocidade : aceleração normal

Consideremos a figura anterior. A velocidade é $\vec{v} = v\,\vec{u}_T$ a sua aceleração será:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{d\vec{u}_T}{dt}v \tag{3.43}$$

(se a trajectória fosse uma linha recta, o vector $\vec{u}_T$ seria constante na direcção, logo invariável no tempo, vindo a sua derivada nula)

Mas sendo a trajectória uma curva, o vector $\vec{u}_T$ varia ao longo desta. Vamos verificar qual a sua variação. Para isso introduzimos o vector unitário $\vec{u}_N$, normal à curva e no sentido da sua concavidade. Tomemos também o ângulo ϕ que a tangente à curva no ponto A faz com o eixo dos XX. Temos então:

$$\vec{u}_T = \cos\phi\,\vec{u}_x + sen\phi\,\vec{u}_y \tag{3.43}$$

e

$$\vec{u}_N = \cos(\phi + \frac{\pi}{2})\,\vec{u}_x + sen(\phi + \frac{\pi}{2})\,\vec{u}_y = -sen\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y \tag{3.45}$$

então:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = -sen\phi\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_x + \cos\phi\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_y = \frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N \tag{3.46}$$

o que nos indica que a variação do versor tangencial é normal à curva.

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\phi}{ds} \tag{3.47}$$

sendo $ds = AA'$ o pequeno arco de trajectória percorrido pela partícula no intervalo de tempo dt. As normais à curva em A e A' interceptam-se no ponto C - centro de curvatura. Definimos o Raio de Curvatura como $\rho = \overline{CA}$, ds será então ds = ρ dφ ou seja $\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$, vindo $\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{\rho}$

e

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{u}_N} \tag{3.48}$$

temos por conseguinte, que;

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N} \tag{3.49}$$

O primeiro termo é um vector tangente à curva e é proporcional à variação no tempo do módulo da velocidade - **é a aceleração tangencial**. O segundo termo é um vector normal à curva e corresponde - **à aceleração normal**. O módulo da aceleração será então dão por:

$$\boxed{a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2}} \tag{3.50}$$

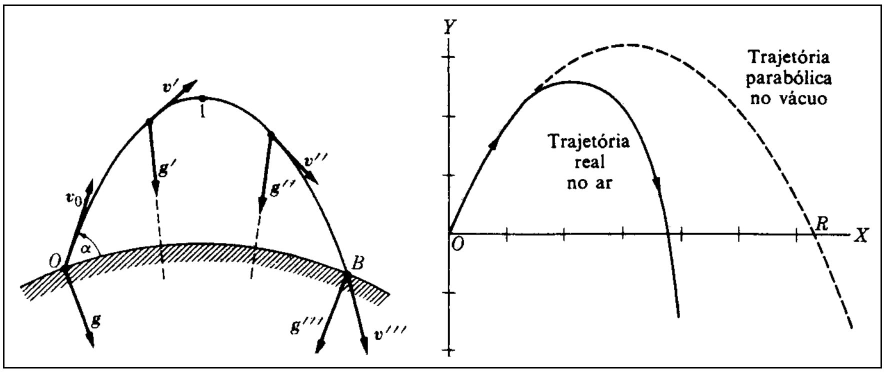


Figura 3.12 – Trajectória parabólica de um projéctil, perto da superfície da Terra. Efeito da direcção da aceleração da gravidade e efeito da atmosfera (atrito do ar).

3.3.6 Movimento Circular: Velocidade Angular

Consideremos agora o caso particular em que a trajectória é uma circunferência, ou seja vamos tratar do **movimento circular**.

O vector velocidade, sendo tangente à circunferência, é sempre perpendicular ao raio $R = \overline{CA}$. Medindo distâncias ao longo da circunferência a partir do ponto O, temos que $s = R\theta$. Como o raio R permanece constante, obtemos;

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad \text{A grandeza} \quad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \tag{3.51}$$

ω tem o nome de **velocidade angular**. É a taxa de variação angular por unidade de tempo. É expressa em radianos por segundo (rad s^{-1}), ou simplesmente s^{-1}.

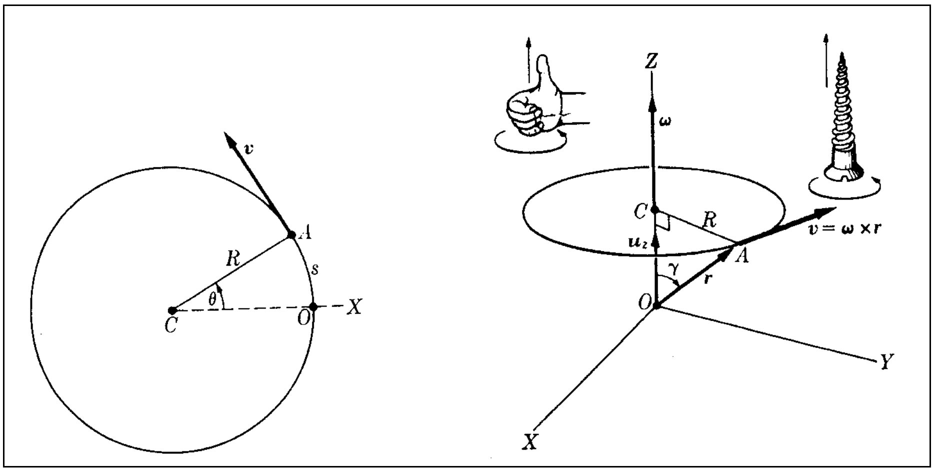


Figura 3.13 – Trajectória circular, velocidades tangencial e angular.

Assim:

$$\boxed{v = \omega R} \tag{3.52}$$

A velocidade angular também pode ser expressa como uma grandeza vectorial, de direcção perpendicular ao plano do movimento e de sentido dado pela "regra do saca-rolhas" (regra da mão direita).

Na figura 3.13 vemos que $R = r\,sen\gamma$ e que $\vec{\omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_Z$, logo podemos escrever que;

$v = \omega\, r\, sen\,\gamma$ ou seja, que:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{3.53}$$

(somente válida para movimentos com r e γ constantes).

3.3.7 Movimento Circular Uniforme

ω é constante, o que implica que o movimento é periódico e constante, ou seja a partícula passa pelo mesmo ponto da circunferência a intervalos regulares de tempo. O **período P** é o tempo necessário para a partícula completar uma revolução (unidade *s*). A **frequência *f*** é o número de revoluções na unidade de tempo (unidade s^{-1} ou Hz).

$$f = \frac{1}{P} \tag{3.54}$$

Estes conceitos de Período e Frequência são aplicados a todos os processos periódicos que ocorrem de uma forma cíclica, processos que se repetem após cada ciclo completo. Por exemplo, o movimento da Terra em redor do Sol, não sendo um movimento circular nem uniforme, é no entanto periódico.

Mas se ω é constante, então:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt = \omega \int_{t_0}^{t} dt \tag{3.55}$$

o que implica;

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 + \omega\,(\,t - t_0\,)} \tag{3.56}$$

tomando $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$ s , temos: $\theta = \omega\, t$ ou $\omega = \theta / t$

Numa revolução completa, obtemos; $t = P$ e $\theta = 2\pi$, logo,

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi / P = 2\pi f} \tag{3.57}$$

Exemplo:
Calcule a velocidade angular da Terra em torno do seu eixo. O período de rotação da Terra é de 23h 56min 4,09 s (P = 86164,09 s). Calcule a velocidade linear à latitude de Tomar (39,5ºN). Raio Terrestre ≈ 6350 km. **Solução:** $\omega = 7{,}2921\times10^{-5}$ rad s^{-1} e $v = 357$ ms^{-1}

3.3.8 Movimento Circular: Aceleração Angular

Quando a velocidade angular de uma partícula varia no tempo, podemos definir a aceleração angular, como;

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}} \tag{3.58}$$

Uma vez que o movimento circular é plano (ocorre sempre no mesmo plano), a direcção de ω mantém-se inalterada no espaço, logo podemos tomar os módulos das grandezas, isto é;

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.59}$$

No caso particular da aceleração angular α ser constante (movimento circular uniformemente acelerado), temos:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt \tag{3.60}$$

Vindo,

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0)} \tag{3.61}$$

(sendo ω_0 a velocidade angular no instante t_0)

como $d\theta/dt = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0)$, integrando vem:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\, dt \tag{3.62}$$

de modo que,

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha (t - t_0)^2} \tag{3.63}$$

e as,

Aceleração Tangencial:
$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha} \tag{3.64}$$

Aceleração Normal:
$$\boxed{a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R} \tag{3.65}$$

3.4 Dinâmica

Na **Cinemática** descrevemos matematicamente os movimentos das partículas (corpos materiais tomados como pontos materiais).

Na **Dinâmica** vamos estudar as razões pelas quais as partículas se movem segundo as trajectórias descritas na cinemática.

Verificamos que;

- os corpos próximos da Terra caem para esta com aceleração constante. Porquê?
- a Terra move-se em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica. Porquê?
- que uma mola oscila quando esticada ou comprimida. Porquê?
- os átomos ligam-se para formar moléculas. Porquê?

Através da observação e do entendimento dos fenómenos, podemos descobrir o comportamento básico da natureza e assim usá-lo em nosso proveito, por exemplo na engenharia, no projecto de máquinas que se movam do modo como desejamos.

O estudo da relação entre o movimento de um corpo
e as causas desse movimento é chamado de **Dinâmica.**

A nossa experiência diária diz-nos que o movimento de um corpo é o resultado directo da sua interacção com os outros corpos que o rodeiam.

Quando um jogador lança uma bola, ele interagiu com a bola modificando o seu movimento, esse movimento é também alterado pela interacção que a bola tem com a Terra.

Todas estas interacções são convenientemente descritas por um conceito matemático chamado de força.

O estudo da Dinâmica é basicamente a análise da relação entre a força e as variações do movimento de um corpo.

Todas as leis do movimento que apresentamos a seguir são generalizações que decorrem da análise cuidada dos movimentos observados por nós e da extrapolação que fazemos dessas observações, ideais ou simplificadas.

3.4.1 Lei da Inércia

Uma partícula que não esteja sujeita à interacção é dita uma partícula livre.

É uma situação ideal, que não existe no Universo, pois todas as partículas interagem com todas as restantes partículas. Por consequência uma partícula livre deveria estar completamente isolada ou ser a única partícula do Universo. Tal caso não existe, pois o simples facto de observar pressupõe uma interacção entre o observador e o objecto em estudo.

A prática, no entanto, mostra-nos que podemos considerar algumas partículas como livres, quer porque, estando elas suficientemente afastadas das demais, as suas interacções são desprezíveis, quer porque as interacções mútuas são canceladas, resultando uma interacção nula.

Enunciado da Lei da Inércia

"uma partícula livre move-se sempre com velocidade constante, isto é, sem aceleração"

Da análise do enunciado, vemos que uma partícula livre ou se move em linha recta com velocidade constante (*m.r.u.*) ou está em repouso (velocidade nula).

Esta afirmação é também conhecida como a **primeira Lei de Newton**, uma vez que foi ***Sir Isaac Newton*** [1], o primeiro a enuncia-la desta forma. É a primeira de três leis enunciadas por Newton, no século XVII.

Lembremos que o movimento é um conceito relativo, e assim sendo devemos sempre indicar a que sistema de referência nos estamos a reportar. Admitimos que o movimento de uma partícula livre é relativo a um observador que seja ele próprio considerado uma partícula (ou sistema) livre, isto é, ele também não está sujeito a interacção com o resto do Universo. Tal observador é chamado um ***observador inercial***, sendo o seu sistema de referência dito ***referencial inercial***. Como tal um referencial deste tipo não pode ter movimento de rotação. (porquê?).

De acordo com a lei da inércia, podemos ter vários observadores inerciais, todos com velocidades constantes. Suas descrições de observações estão relacionadas pela transformação de Galileu (mecânica clássica) ou pela transformação de Lorentz (mecânica relativista), dependendo da grandeza das suas velocidades relativas.

A Terra não é um referencial inercial, quer devido à sua rotação diária, quer devido à interacção com o Sol e os outros Planetas. No entanto, em muitos casos, podemos considerar essas interacções e rotação desprezíveis, considerando os nossos observatórios terrestres como inerciais, sem grande erro.
O Sol também não pode ser considerado um referencial inércial. Devido à sua interacção com os restantes corpos celestes da nossa Galáxia, ele descreve uma órbita curva em torno do centro desta, (figura 3.1).

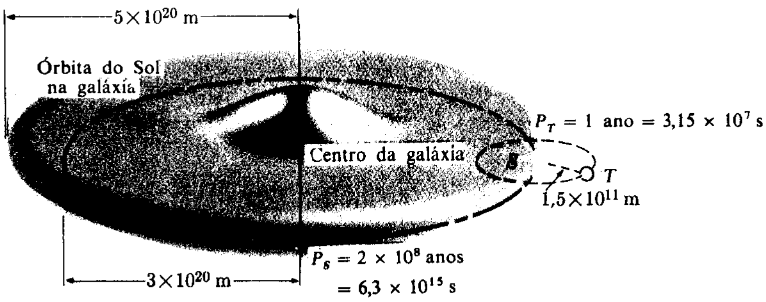


Figura 3.14 – Representação do movimento da Terra em torno do Sol, e deste em torno do centro da Galáxia.

[1](Isaac Newton, 1642-1727), físico e matemático inglês. Formulou as leis fundamentais da mecânica e da gravitação universal, tal como o cálculo diferencial e integral.

Exemplo:

Uma bola esférica colocada sobre uma superfície horizontal e lisa permanecerá em repouso a menos que actuemos sobre ela. Ou seja, a sua velocidade permanece constante, com valor igual a zero. Admitimos que a superfície sobre a qual a bola repousa equilibra a interacção entre a bola e a Terra, e portanto a bola está essencialmente livre de interacções. Quando actuamos na bola, por exemplo numa mesa de bilhar, ela sofre momentaneamente uma interacção e adquire velocidade. Mas após essa acção, a bola pode ser considerada como livre, movendo-se em linha recta com a velocidade adquirida quando foi atingida. Se a bola é perfeitamente esférica e rígida, e a superfície perfeitamente lisa, podemos admitir que a bola continuará a mover-se indefinidamente em linha recta com velocidade constante. Na prática, tal não acontece, pois a bola perde velocidade e acaba por parar. Dizemos que ocorreu uma interacção adicional entre a bola e a superfície – interacção essa que conhecemos como *atrito*.

3.4.2 Quantidade de Movimento

Podemos introduzir o conceito operacional de massa como sendo um valor numérico que atribuímos a cada corpo ou partícula, número esse atribuído por comparação com um corpo-padrão (massa padrão de 1 kg, capítulo 1, página 3). A massa passa a ser um parâmetro que distingue uma partícula de outra. A nossa definição de massa é para o corpo suposto em repouso, ou seja, *massa em repouso*. Por esta definição não sabemos qual o comportamento da massa (será que se mantém constante?) com o movimento da partícula. Mas admitamos que a massa é independente do estado do movimento – para começar, é uma boa aproximação (desde que a velocidade seja, quando comparada com a velocidade da luz c_0, muito inferior a esta).

A ***quantidade de movimento*** (também chamada de *momento cinético*, simplesmente *momento*, ou *momentum* - do latim), de uma partícula é definido como o produto da sua massa pela sua velocidade.

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \tag{3.66}$$

é uma quantidade vectorial e tem a mesma direcção e sentido da velocidade.

É um conceito muito importante em Física, pois combina os dois elementos que caracterizam o estado dinâmico de uma partícula (corpo); a sua massa e a sua velocidade. No Sistema Internacional (S.I.) a quantidade de movimento é expressa em m.kg.s^{-1}.

Várias experiências mostram que este conceito de quantidade de movimento é uma grandeza dinâmica mais informativa (abrangente) do que a velocidade por si só.

Por exemplo, um camião carregado, em movimento, é mais difícil de conseguir parar (ou de ser acelerado) do que um camião vazio, mesmo que ambos tenham a mesma velocidade, pois as suas quantidades de movimento são distintas (é maior no camião carregado).

Podemos agora enunciar a ***lei de inércia*** de outra forma;

"uma partícula livre move-se sempre com quantidade de movimento constante"

3.4.3 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

A consequência imediata deste último enunciado, diz-nos que um observador inercial reconhece que uma partícula não é livre, quando ele observa que esta não permanece com velocidade ou quantidade de movimento constantes, por outras palavras; a partícula sofre uma aceleração.

Considerando agora uma situação ideal, de apenas duas partículas sozinhas no Universo, interagindo entre si. Como resultado dessa interacção as suas velocidades individuais variam com o tempo e as suas trajectórias são em geral curvas.

Num determinado instante *t*, a partícula 1 está em *A*, com velocidade $\vec{v}_1$ (e massa m_1), a partícula 2 está em *B*, com velocidade $\vec{v}_2$ (e massa m_2). Num instante posterior *t'*, as partículas estarão em *A'* e *B'*, com velocidades respectivamente $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$.

A quantidade de movimento total do sistema, no instante *t*, é:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad (3.67)$$

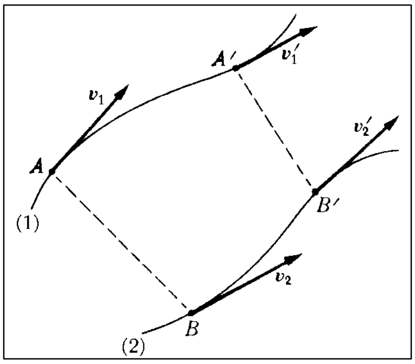


Figura 3.15 – Interacção entre duas partículas.

No instante *t'*, a quantidade de movimento total do sistema, será:

$$\vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

O importante, é que a observação nos instantes *t* e *t'*, quaisquer que eles sejam, mostra-nos sempre que:

$$\vec{P} = \vec{P}'$$

"a quantidade de movimento total de um sistema composto por duas partículas sujeitas somente às suas interacções mútuas permanece constante"

Por exemplo se considerássemos somente a Terra e a Lua (desprezando os efeitos do Sol e restantes planetas), a soma das suas quantidades de movimento, relativas a um referencial inercial seria constante.

Este Princípio de Conservação de Quantidade de Movimento, enunciado para duas partículas, pode ser generalizado para um qualquer número de partículas constituído num sistema isolado, isto é um sistema de partículas só com interacções mútuas.

Portanto, numa regra geral temos o seguinte enunciado:

"a quantidade de movimento total de um sistema isolado de partículas é constante"

que pode ser expressa da seguinte forma;

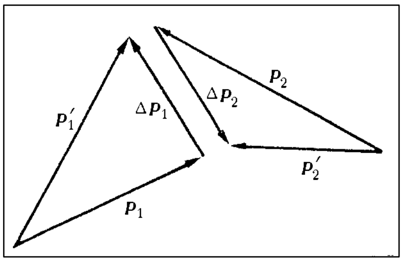
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \overrightarrow{\text{constante}} \qquad (3.68)$$

Tal é o que se verifica nas experiências. Muitas partículas atómicas e sub-atómicas foram descobertas, porque "não se verificava" a conservação da quantidade de movimento. A "não conservação" resultava da interacção *não esperada* (e desconhecida) de uma nova partícula.

Voltando ao caso particular de um sistema constituído por apenas duas partículas;

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{\text{constante}} \qquad (3.69)$$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'}$ em dois instantes t e t' respectivamente, o que implica que;



$$\vec{p}_1^{\,'} - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2^{\,'} = -(\vec{p}_2^{\,'} - \vec{p}_2)$$

se escrevermos as variações como: $\Delta\,\vec{p} = \vec{p}^{\,'} - \vec{p}$ (3.70)

teremos; $\Delta\,\vec{p}_1 = -\Delta\,\vec{p}_2$ (3.71)

Figura 3.16 – Troca de quantidade de movimento como resultado da interacção entre duas partículas.

A conclusão tirada desta expressão - é imediata - num sistema isolado de duas partículas em interacção, a variação da quantidade de movimento de uma delas, durante um certo intervalo de tempo, é igual em módulo, e de sinal contrário, à variação da quantidade de movimento da outra partícula durante o mesmo intervalo de tempo. Podemos sintetizar este conhecimento da seguinte maneira:

"uma interacção origina sempre uma troca de quantidade de movimento"

de modo que a quantidade de movimento "perdida" por uma das partículas em interacção seja igual à quantidade de movimento "ganha" pela outra partícula.

Nesta perspectiva, a **Lei da Inércia**, é um caso muito particular do princípio da conservação da quantidade de movimento. Com uma só partícula, $\vec{p}_1 = \overrightarrow{\text{constante}}$ e $\Delta\,\vec{p}_1 = \vec{0}$, ou equivalente, $\vec{v}_1 = \overrightarrow{\text{constante}}$.

Por exemplo no disparo de um dardo tranquilizante, a arma disparada recua para compensar a quantidade de movimento adquirida pelo projéctil no seu movimento para a frente. Inicialmente o sistema arma mais o dardo está em repouso (relativamente ao agente), ou seja a quantidade de movimento total é zero.

O mesmo acontece quando da explosão de uma projéctil. A quantidade de movimento antes da explosão é igual a soma das quantidades de movimento da totalidade dos fragmentos após a explosão.

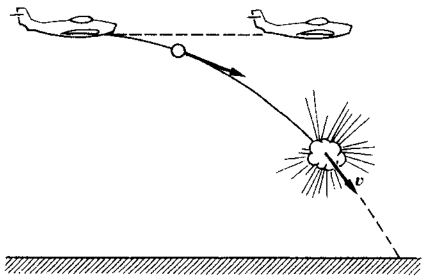


Figura 3.17 – Conservação da quantidade de movimento numa explosão.

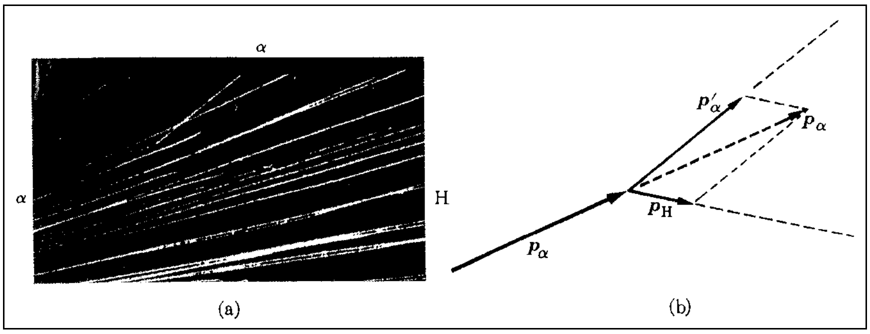


Figura 3.18 – Conservação da quantidade de movimento numa colisão entre uma partícula α e um protão. a) fotografia do fenómeno, b) esquema da interacção.

3.4.4 Redefinição de Massa

Podemos exprimir a variação da quantidade de movimento de uma partícula, como:

$$\Delta \vec{p} = \Delta (m\vec{v}) = m \, \Delta \vec{v} \tag{3.72}$$

num sistema de duas partículas,

$$m_1 \, \Delta \vec{v}_1 = - m_2 \, \Delta \vec{v}_2 \tag{3.73}$$

considerando somente os módulos,

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|} \tag{3.74}$$

a razão das massas é inversamente proporcional ao módulo das variações das velocidades. Podemos assim obter uma *definição dinâmica* de massa. Se tomarmos a massa m_1 como a nossa "massa padrão" (unitária), para a outra partícula em interacção, podemos obter a sua massa m_2 , (tomando a hipótese da constância da massa).

3.4.5 A Segunda e Terceira Lei de Newton. Conceito de Força

Quer por dificuldade, quer propositadamente, é quase sempre impossível de determinar as interacções totais entre todas as partículas de um sistema muito numeroso, ou seja, conhecer as quantidades de movimento da cada partícula.

Se introduzirmos o conceito de Força, podemos resolver este "problema".

Vamos relacionar as variações das quantidades de movimento, num intervalo de tempo, $\Delta t = t' - t$

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \tag{3.75}$$

quando $\Delta t \to 0$, temos,

$$\frac{d\, \vec{p}_1}{d\, t} = -\frac{d\, \vec{p}_2}{d\, t} \tag{3.76}$$

Daremos *à variação temporal da quantidades de movimento de uma partícula* o nome de *"força"*.

A força actuando numa partícula, será:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\, \vec{p}}{d\, t}} \tag{3.77}$$

Matematicamente é a definição acima explicitada.
Fisicamente é a expressão da interacção entre a partícula e o restante sistema.

A expressão referida é a ***Segunda Lei de Newton*** para o movimento, (é mais uma definição do que uma lei, e é consequência directa do princípio de conservação da quantidade de movimento).

Agora podemos escrever, da expressão (3.76);

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2} \tag{3.78}$$

ou seja,

"quando duas partículas interagem, a força sobre uma partícula é igual em módulo, e de sentido contrário, à força sobre a outra partícula"

O que corresponde ao enunciado da ***Terceira Lei de Newton*** para o movimento, também conhecida como a Lei de Acção-Reacção (figura 3.19 a).

Podemos agora reescrever a **segunda lei**, como,

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\, \vec{p}}{d\, t} = \frac{d\,(m\, \vec{v})}{d\, t} = m \frac{d\, \vec{v}}{d\, t} = m\, \vec{a}} \tag{3.79}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{3.80}$$

"Se a massa for constante, a força é igual ao produto da massa pela aceleração"

- a força e a aceleração têm a mesma direcção e sentido,
- se a força for constante, a aceleração, $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ é também constante – o movimento é uniformemente acelerado.

É o que ocorre perto da superfície da Terra. Por exemplo, os corpos em queda livre exibem um movimento com aceleração constante ($\vec{g}$).

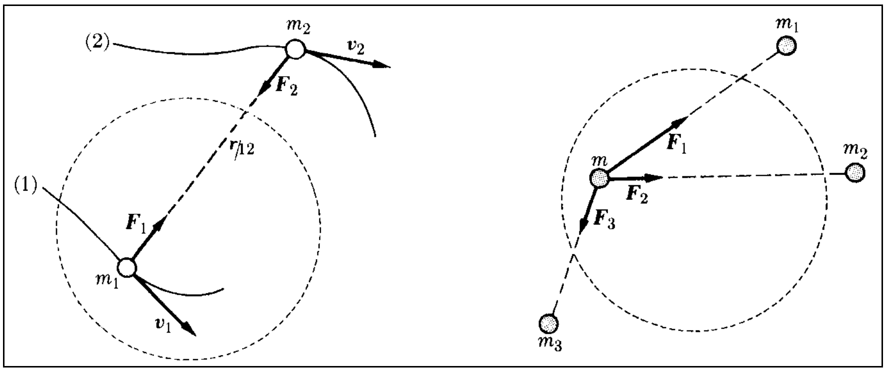
A força de atracção gravitacional da Terra sobre os corpos é chamada de **Peso**, e é :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}} \tag{3.81}$$

Consideremos uma partícula (m) a interagir com um número n de partículas, (m_1, m_2, m_3, ...). Devido a essa interacção, cada uma das partículas produzirá uma variação na quantidade de movimento da partícula (m), que se caracteriza pelas respectivas forças $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ...)$. A variação total da quantidade de movimento da partícula será:

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = \vec{F}_{res} \tag{3.82}$$

A força $\vec{F}$ é chamada <u>força resultante</u> que actua na partícula m.



a) b)

Figura 3.19 – a) Par acção-reacção. b) Força resultante sobre uma partícula.

Não estamos a entrar em conta com as interacções mútuas entre todas as partículas, mas somente a interacção sobre a partícula m, de modo a simplificar a sua descrição. Deste modo podemos discutir o movimento da partícula m, admitindo que a força $\vec{F}$ é somente função das coordenadas da partícula, ignorando os movimentos das restantes partículas com as quais interage.

Esta aproximação é chamada ***Dinâmica de uma Partícula.***

No dia a dia "sentimos" o conceito de força, como uma interacção por contacto, por exemplo a martelar um prego. Mas essa interacção é exactamente igual à interacção que existe entre a Terra e o Sol, porquanto as distâncias envolvidas sejam muito diferentes. Na realidade os corpos ou partículas são sempre mantidos a distâncias entre eles de acordo com as suas massas e estruturas. Se a interacção ocorre à distância, então teremos de pensar num mecanismo de transmissão dessa mesma interacção, e como as interacções se propagam com velocidade finita (possivelmente à velocidade máxima – a da luz), teremos de repensar o conceito de força e o seu papel. Na prática, e para baixas velocidades e pequenas distâncias, a nossa aproximação continua a ser excelente e suficiente para a descrição das interacções observadas.

3.4.6 Unidade de Força. Definição

É expressa em unidades de massa e de aceleração.
Unidade da força é o ***newton*** , representada por **N** (kg m s^{-2}).
Define-se o *newton* como a força que, aplicada a um corpo de massa 1 kg, produz neste uma aceleração de 1 m s^{-2}.

Outra unidade frequentemente usada em engenharia é o quilograma-força (kgf), definida como a força igual ao peso de uma massa de 1 kg. Assim, como o valor da aceleração da gravidade é g = 9,8 m s^{-2} (valor médio ao nível do mar), temos que o valor de 1 kgf = 9,8 N .

Exemplos:

Um automóvel de massa 1000 kg sobe uma rua inclinada de α = 20º com a horizontal. Determinar a força que o motor deve exercer para que o automóvel se mova: **a)** com movimento uniforme, **b)** com aceleração de 0,2 m s^{-2} . Determinar também em cada caso, a força que o solo exerce no automóvel.

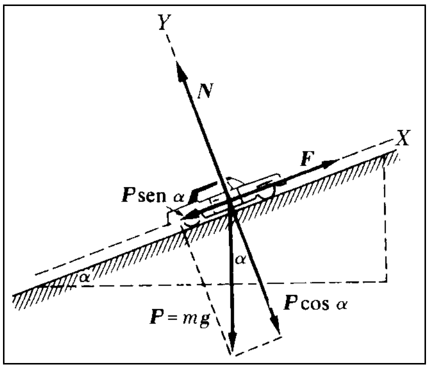


Figura 3.20 – Forças aplicadas no carro.

Solução: a) F = 3350 N , **b)** F = 3550 N

Um corpo de massa 10 kg está sujeito a uma força F = (120t + 40) N, movendo-se em linha recta. No instante t = 0 s o corpo está em x_0 = 5 m, com velocidade v_0 = 6 m s^{-1} . Determine a velocidade e posição do corpo em qualquer instante posterior.

Solução: $v(t) = 6t^2 + 4t + 6$ m s^{-1} , $x(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5$ m

3.4.7 Forças de Atrito

Sempre que quaisquer dois corpos estão em contacto, por exemplo um livro em repouso sobre uma mesa, existe uma resistência ao movimento relativo entre os dois corpos. Se empurrar-mos o livro ao longo da superfície da mesa, observamos que ele diminui progressivamente de velocidade até parar. A perda observada de velocidade (de quantidade de momento) - indica que uma força se opõe ao movimento - força essa chamada de atrito de escorregamento. Ela é devida à interacção das moléculas superficiais dos dois corpos em contacto (denominada de *coesão* ou *adesão*, dependendo dos corpos serem constituídos ou não pelo mesmo material). O atrito é um fenómeno bastante complexo e depende de muitos factores, tais como; a condição e natureza das superfícies, a velocidade relativa, etc.

Verifica-se experimentalmente que o módulo da força de atrito $\left|\vec{F}_a\right|$ é, para a maioria dos casos, proporcional à força normal (N) de contacto entre os corpos (figura 3.21). A constante de proporcionalidade é o chamado <u>coeficiente de atrito</u> (μ), um número adimensional, (que se pode exprimir também em percentagem).

$$F_a = \mu N \tag{3.83}$$

A força de atrito de deslizamento opõe-se sempre ao movimento do corpo, tendo assim uma direcção igual mas sentido oposto à velocidade do corpo.

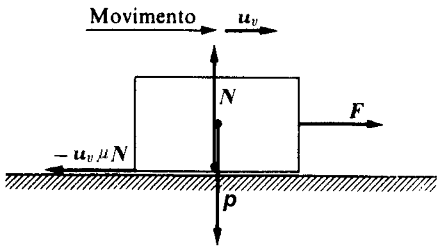


Figura 3.21 – Força de atrito na base de contacto entre um bloco e uma superfície.

Verificamos ainda experimentalmente a existência de dois tipos diferentes de coeficientes de atrito;

- ***estático*** (μ_e), quando multiplicado pela força normal, dá a força mínima necessária para iniciar o movimento relativo entre os dois corpos, inicialmente em contacto e em repouso relativo.
- ***cinético*** (μ_c), quando multiplicado pela força normal, dá a força necessária para manter os dois corpos em movimento relativo uniforme.

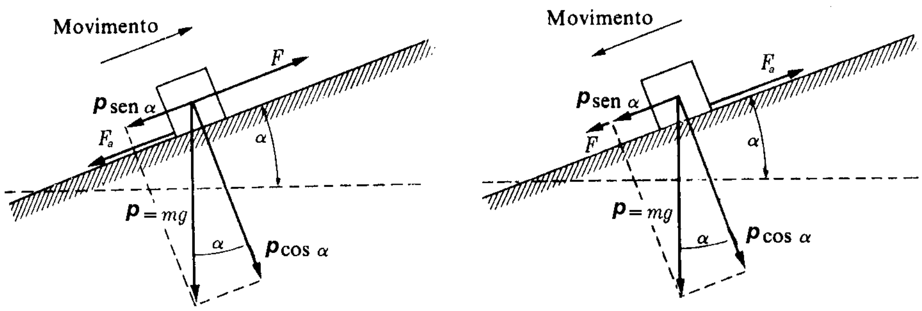
Determinações experimentais mostram que os valores de μ_e são sempre superiores aos valores de μ_c , (ver tabela 3.1).

Tabela 3.1 - Valores médios de coeficientes de atrito para diversos materiais.

Materiais	μ_e	μ_c
Aço duro / Aço duro	0,78	0,42
Aço doce / Aço doce	0,74	0,57
Chumbo / Aço doce	0,95	0,95
Cobre / Aço doce	0,53	0,36
Níquel / Níquel	1,10	0,53
Teflon / Teflon	0,04	0,04
Teflon / Aço	0,04	0,04
Borracha / Betão molhado	0,30	0,25
Borracha / Betão seco	1,0	0,8
Madeira / Madeira	0,5	0,4
Gelo / Gelo	0,1	0,03
Prancha de *ski* / Neve molhada	0,14	0,1
Juntas humanas	0,01	0,003

Exemplo:

Um corpo de massa igual a 0,8 kg é colocado sobre um plano inclinado de α = 30º com a horizontal. Que forças devem ser aplicadas no corpo para que ele se movimente, **a)** para cima, **b)** para baixo. Suponhamos em ambos os casos o corpo a mover-se uniformemente e com aceleração de 0,10 m s^{-2} . O coeficiente de atrito cinético é de 0,30.



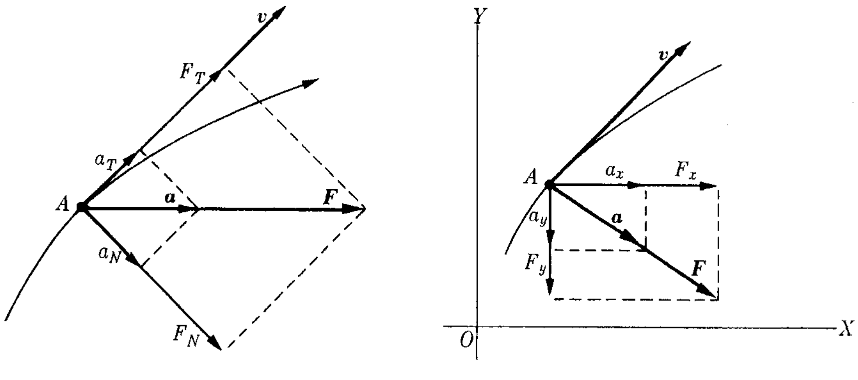
a) b)

Figura 3.22 – Bloco de massa m. a) Forças aplicadas na subida do bloco.
b) Forças aplicadas na descida do bloco.

Solução: a) $F = 5{,}95$ N (m.r.u.) e $F = 6{,}03$ N , **b)** $F = 1{,}88$ N (m.r.u.) e $F = 1{,}80$ N

3.4.8 Movimento Curvilíneo

Já sabemos que quando a força tem a direcção da velocidade, o movimento é rectilíneo. Para se ter um movimento curvilíneo, a força resultante deve formar um ângulo (diferente de 0° ou 180°) com a velocidade, para que a aceleração tenha uma componente perpendicular à velocidade, necessária para a variação de direcção do movimento da partícula. Por outro lado sabemos que a força é paralela à aceleração, como podemos ver na figura 3.23.



a) b)

Figura 3.23 – Forças num movimento curvilíneo. a) Componentes tangencial e normal.
b) Decomposição da força normal no sistema de eixos.

Da 2ª lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$ (expressão 3.79 e 3.80), concluímos (como já vimos) que, a componente tangencial - força tangencial, é:

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_T = m\frac{dv}{dt}\vec{u}_T \qquad (3.84)$$

e a componente perpendicular - <u>força normal</u>, é:

$$\vec{F}_N = m\vec{a}_N = \frac{mv^2}{\rho}\vec{u}_N \tag{3.85}$$

(ρ é o raio de curvatura da trajectória)

A força normal aponta sempre para o centro de curvatura da trajectória. A força tangencial é responsável pela variação do módulo da velocidade, e a força normal é responsável pela variação da direcção da velocidade. Se a força tangencial for zero, não haverá aceleração tangencial e o movimento será uniforme (m.c.u.). Se a força normal for zero, não haverá aceleração normal e o movimento será rectilíneo (m.r.u.).

No caso particular do movimento circular, ρ é o raio R da circunferência e $v = \omega$ R, de modo que a força normal é denominada centrípeta,

$$F_N = m\omega^2 R \tag{3.86}$$

No movimento circular uniforme só existe a aceleração normal, que podemos escrever na forma vectorial como:

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{v} \tag{3.87}$$

(derivada temporal da expressão 3.53).

assim,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(m\vec{v}) \tag{3.88}$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\omega}\times\vec{p}} \tag{3.89}$$

uma relação matemática muito útil entre a força, a velocidade angular e a quantidade de movimento de uma partícula com movimento circular uniforme. Algumas vezes, torna-se conveniente o uso das componentes rectangulares da Força. No caso do movimento no plano, por exemplo, a equação vectorial $\vec{F} = m\vec{a}$ pode ser decomposta nas duas seguintes equações:

$$\vec{F}_X = m\vec{a}_X \qquad \text{e} \qquad \vec{F}_Y = m\vec{a}_Y$$

Por integração destas duas equações obtemos a velocidade e a posição da partícula em qualquer instante.

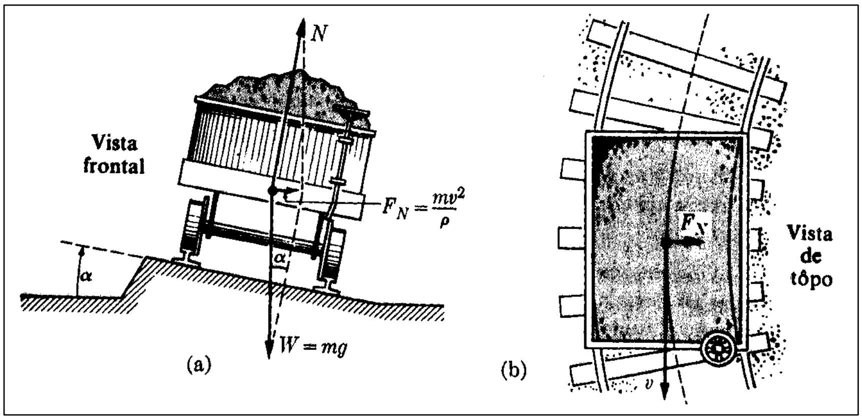
No caso geral, em que a massa do corpo é variável, temos de usar $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Mas sendo $\vec{p}$ paralelo ao vector velocidade é tangente à trajectória.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}\vec{u}_T + \frac{vp}{\rho}\vec{u}_N \tag{3.90}$$

Exemplos:

Inclinação das curvas

As vias-férreas e as estradas são inclinadas nas curvas de modo a produzir a força centrípeta solicitada pelos veículos em movimento nas curvas. O ângulo de inclinação em função da velocidade do veículo na curva, do raio de curvatura desta e da gravidade é dado por:

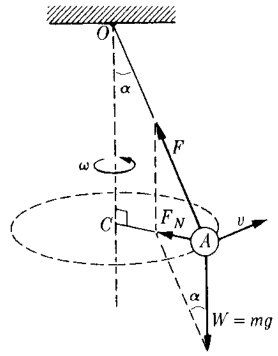


$$tg\,\alpha = \frac{v^2}{\rho g} \tag{3.91}$$

O resultado é independente da massa do corpo.

Figura 3.24 – Ângulo de inclinação de uma curva. Forças aplicadas. **a)** Vista em corte. **b)** Vista em planta

Pêndulo cónico



Um fio de comprimento L, ligado a um ponto fixo, tem numa extremidade uma massa *m* que gira em torno da vertical com velocidade angular ω (constante). Este dispositivo é um pêndulo cónico. Achar o ângulo que a corda faz com a vertical, na situação de equilíbrio.

$$F_N = m\omega^2 R = m\omega^2 L\,sen\,\alpha \tag{3.92}$$

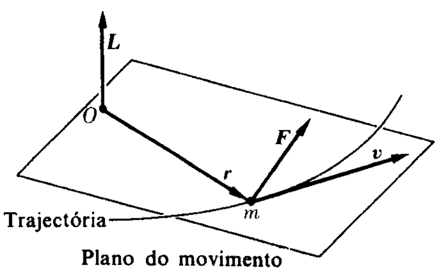
$$tg\,\alpha = \frac{F_N}{P} = \frac{\omega^2 L\,sen\,\alpha}{g} \tag{3.93}$$

Figura 3.25 – Forças aplicadas num pêndulo cónico.

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L} \tag{3.94}$$

Quanto maior a velocidade angular ω maior será o ângulo α, como nos mostra a experiência. Por essa razão, há muito tempo que o pêndulo cónico é usado como regulador de velocidade; por exemplo, para fechar a válvula de entrada de vapor quando a velocidade ultrapassa um certo limite pré fixado, e para a abri-la quando a velocidade diminui.

3.4.9 Momento Angular. Princípio de Conservação do Momento



O momento angular (também denominado momento orbital, ou momento da quantidade de movimento), em relação ao ponto O, de uma partícula de massa *m* movendo-se com velocidade $\vec{v}$ (e portanto com quantidade de movimento $\vec{p} = m\vec{v}$) é definido pelo produto vectorial,

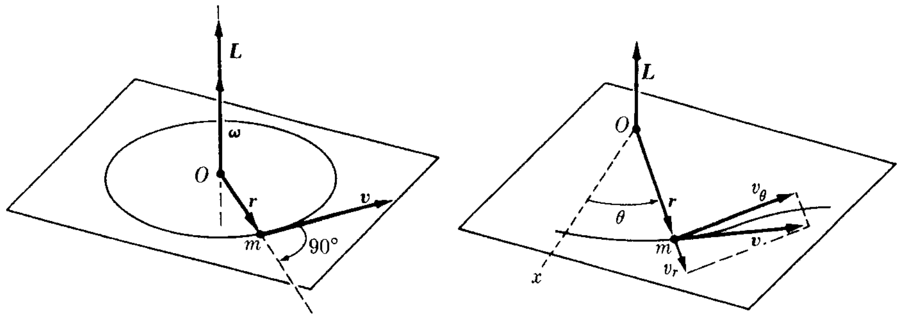
$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \tag{3.95}$$

Figura 3.26 – Momento angular de uma partícula, em relação a O.

ou

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad (3.96)$$

O momento angular é portanto, um vector perpendicular ao plano determinado por $\vec{r}$ e $\vec{v}$. De um modo geral, o momento angular de uma partícula varia em módulo e direcção durante o movimento da partícula. Entretanto, se o movimento da partícula ocorre num plano, e se o ponto O pertence ao plano, a direcção do momento angular permanece constante e perpendicular ao plano (figura 3.14), visto que $\vec{r}$ e $\vec{v}$ estão contidos no plano (e definem o plano do movimento).



a) b)

Figura 3.27 – Momento angular numa trajectória plana. Componentes da velocidade.

No caso do movimento circular, quando O é o centro da circunferência, os vectores $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, e $v = \omega\, r$, de modo que L = m $r\, v = m\, r^2\, \omega$

O sentido de $\vec{L}$ coincide com o sentido de $\vec{\omega}$ (são vectores paralelos), de modo que temos:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \qquad (3.97)$$

Se o movimento curvilíneo é plano mas não circular, podemos decompor a velocidade em componentes radial e transversal (figura 3.27 b)

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \qquad (3.98)$$

e podemos reescrever o momento angular como:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta \qquad (3.99)$$

como, $v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$ temos que: $L = mr^2\dfrac{d\theta}{dt}$ (3.100)

(os vectores $\vec{r}$ e $\vec{v}_r$ são paralelos, logo $\vec{r} \times \vec{v}_r = \vec{0}$)

Podemos escrever o momento angular como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_X & p_Y & p_Z \\ \vec{u}_X & \vec{u}_Y & \vec{u}_Z \end{vmatrix} \qquad (3.101)$$

Tomemos agora a derivada em relação ao tempo, isto é,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{3.102}$$

como $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$, temos então que;

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}} \tag{3.103}$$

"a variação temporal do momento angular de uma partícula é igual ao momento da força aplicada na partícula"

O membro direito da expressão (3.103) é o momento da força $\vec{\tau}$ (em relação a um mesmo ponto). O que significa que a variação temporal do momento angular resulta da existência de um momento de uma força aplicada.

Se o momento das forças aplicadas for nulo verificamos que o Momento Angular permanece constante ao longo do tempo – **O Princípio de Conservação do Momento Angular**.

3.5 Corpo Rígido

3.5.1 Noção de Corpo Rígido

Estudamos já os movimentos de corpos cujas dimensões eram desprezáveis face às medidas das suas trajectórias ou por conveniência e simplificação, tomados como pontos de massa *m*. A tais corpos atribuímos a designação de **partículas materiais**.

Estudaremos de seguida o movimento de **corpos** cujas dimensões já não são desprezáveis. Admitiremos no entanto e ainda a simplificação de esses corpos serem **rígidos**, **indeformáveis**, isto é, tais que *a distância entre dois quaisquer dos seus pontos não varia no decurso do tempo*. Trata-se, em rigor, de *corpos ideias*, aos quais, porém, muitos corpos autênticos se assemelham no seu comportamento: são aqueles cuja rigidez é suficientemente grande para serem desprezáveis os movimentos relativos das suas partículas constituintes, tais como, por exemplo, moléculas poliatómicas, barras de aço, planetas, etc...

Os movimentos dos corpos rígidos podem ser **simples** (translação pura e rotação pura) ou **compostos** (translação e rotação simultâneas). O movimento mais simples de um corpo rígido é o movimento de translação ou translação pura, que tem a seguinte característica: *durante o movimento, qualquer segmento, AB, BC ou outro, definido por dois pontos do corpo,* ***não muda de direcção***, (figura 3.28).

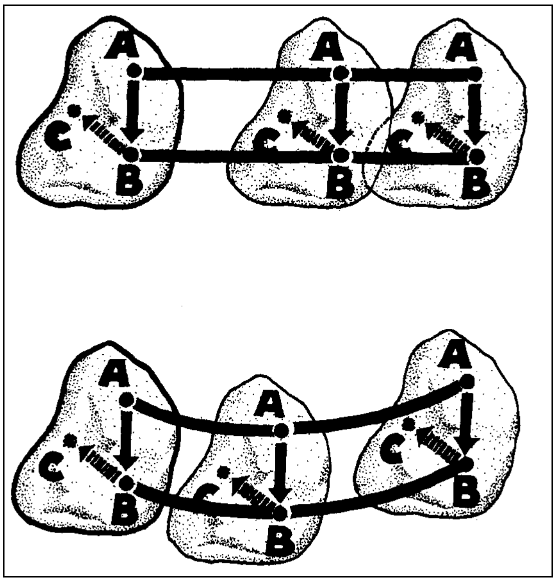


Figura 3.28 - Translação de um Corpo Rígido; rectilínea e curvilínea.

3.5.2 Momento de uma Força em relação a um ponto

Efeito rotativo de uma força aplicada a um sólido (corpo rígido)

Consideremos um ponteiro que pode rodar livremente em torno de um ponto extremo *O*, fixo. Seja $\vec{F}$ a força que actua no ponteiro e cujas características, relativamente ao ponteiro, se mantêm (intensidade, ângulo com o ponteiro, ponto de aplicação) no tempo, (figura 3.28).

A experiência mostra que o *efeito rotativo, giratório* ou de *torção* que a força $\vec{F}$ imprime no ponteiro, depende:

1º - da intensidade ***F*** da força,
2º - da distância ***b***, do ponto *O* à linha de acção da força $\vec{F}$, chamada *braço de alavanca* ou apenas *braço* da força $\vec{F}$,
3º - do ângulo que a força $\vec{F}$ faz com o *braço de alavanca*.

Se a distância ***b*** for nula, isto é, se a linha de acção de $\vec{F}$ passar por *O* , a força não produz qualquer efeito rotativo no ponteiro, somente um efeito de translação.

A análise das propriedades atrás descritas, leva-nos a introduzir a seguinte *grandeza*:

Momento da força $\vec{F}$ em relação ao ponto *O*

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (3.104)$$

(a *unidade S.I. de momento* de uma força é o *metro* × *newton* (m.N))
cujo *módulo, mede o efeito rotativo, giratório* ou de *torção* da força $\vec{F}$, e cuja *direcção é a do eixo em torno da qual roda o ponteiro*.

Características:

Linha de acção: perpendicular ao plano de $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (é o *eixo imaginário* em torno do qual acorre a rotação).
Sentido: obtido por qualquer das regras do produto externo (vectorial), em particular pela regra do triedro da mão direita.
Módulo: mede o efeito rotativo da força e é dado por, $M_0 = r.F.sin\ \alpha = F.b$, ou seja o produto da medida da força pelo braço.

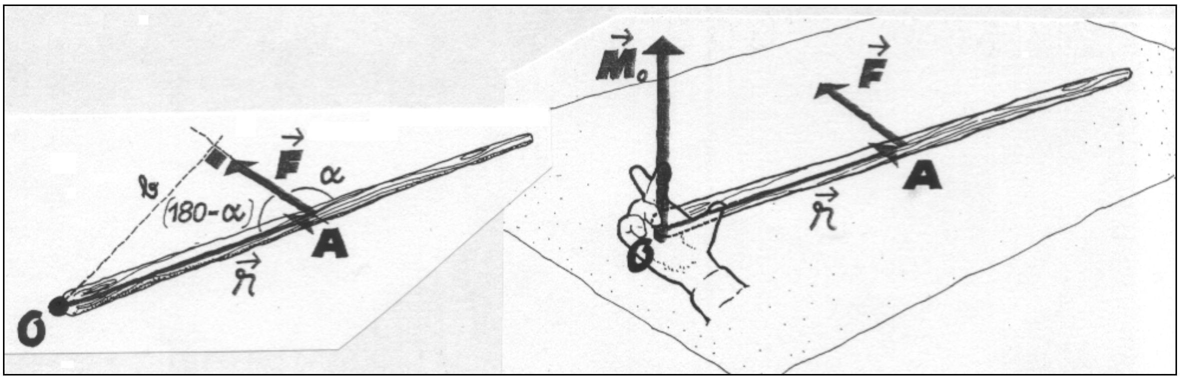


Figura 3.28 - Momento da força $\vec{F}$ em relação ao ponto O, (aplicação da regra da mão direita).

3.5.3 Momento de um Sistema de Forças em relação a um ponto

Consideremos um sistema de duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, não coplanares. Em relação a um ponto qualquer A (que, no presente caso, com a força $\vec{F}_1$, define o plano π), (figura 3.29), o momento de cada uma das forças é, respectivamente, $\vec{M}_1$ e $\vec{M}_2$.

Chama-se **momento polar resultante**, em A, do *sistema de forças*, ou simplesmente **momento polar do sistema de forças**, o vector, aplicado em A, que é igual à *soma dos momentos de cada uma das forças* em A:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \tag{3.105}$$

Para um *sistema de n forças*, teremos:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \tag{3.106}$$

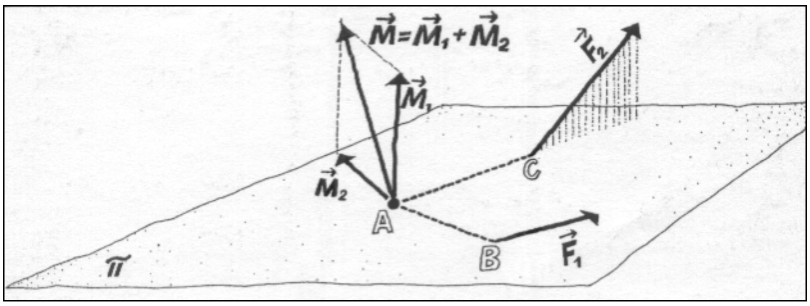
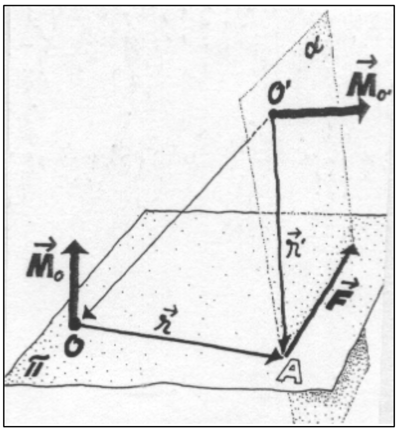


Figura 3.29 - Momento polar resultante, em A, dum sistema de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

(particular **atenção** para o facto de o *momento resultante de um sistema de forças* ser, em geral, *diferente do momento da sua força resultante*)

3.5.4 Relação entre os momentos de uma força em dois pontos diferentes



Consideremos uma força $\vec{F}$ e os seus momentos em dois pontos diferentes, *O* e *O'* (figura 3.30).

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{e} \qquad \vec{M}_{0'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

A relação entre os dois momentos, advém de termos:

$$\vec{r}' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}$$

$$\vec{M}_{0'} = \vec{r}' \times \vec{F} = (\overrightarrow{O'O} + \vec{r}) \times \vec{F}$$

Figura 3.30 - Momento em dois pontos diferentes.

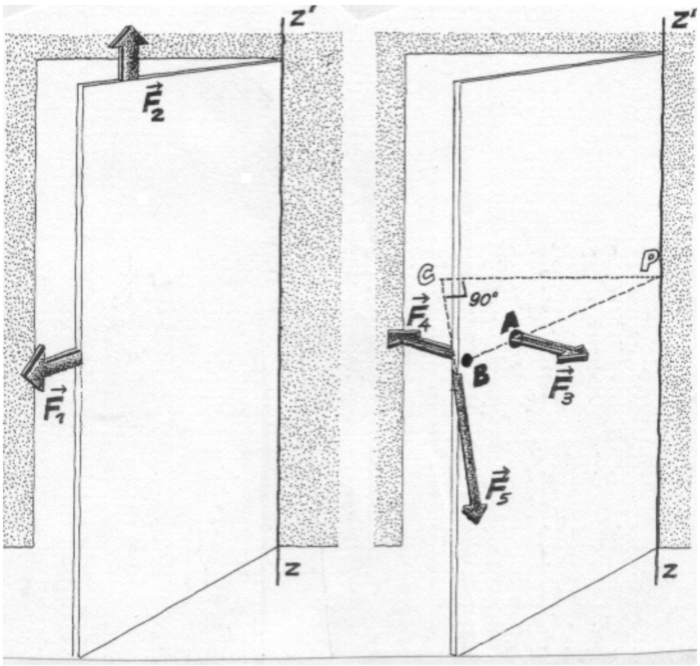
e

$$\vec{M}_{0'} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} \qquad (3.107)$$

"O *momento de uma força num ponto, O', é a soma do momento dessa força em outro ponto, O, com o seu momento em O' quando aplicada em O."*

3.5.5 Momento de uma Força em relação a um eixo

Quando se aplicam numa porta forças cuja linha de acção está no plano da porta - tais forças não contribuem para a abrir nem para a fechar, (figura 3.31 a). Diz-se então que estas forças *não têm efeito rotativo*, *giratório* ou de *torção*.

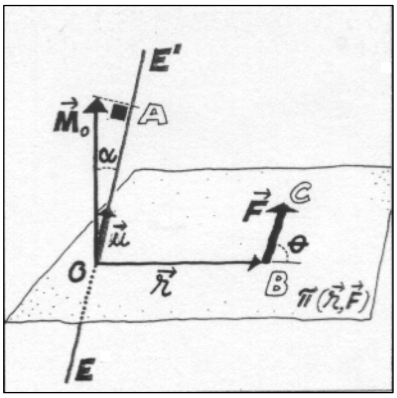


a) b)

Figura 3.31 - Portas móveis (rotativas) em torno de um eixo vertical ZZ'.

Para medir o efeito de rotação de uma força em relação a um eixo, utiliza-se o chamado **momento da força em relação ao eixo**. Porém, este momento, também designado *momento axial*, não é um vector, mas sim, um escalar. Com efeito, define-se:

"Momento de uma força $\vec{F}$ em relação a um eixo (EE') é a componente escalar, segundo o eixo, do momento da força em relação a um qualquer ponto O, do eixo"



sendo: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ perpendicular ao plano π $(\vec{r}, \vec{F})$, e $\vec{u}$ o versor do eixo fixo (*EE'*), a componente escalar de $\vec{M}_0$ neste eixo é a projecção ortogonal de $\vec{M}_0$ sobre o eixo, ou seja, segundo a definição de produto interno (escalar):

$$M = \vec{M}_0 \cdot \vec{u} = \left|\vec{M}_0\right| \left|\vec{u}\right| \cos\alpha = \overline{OA} \qquad (3.108)$$

Figura 3.32 - Momento de uma força em relação a um eixo fixo *EE'*.

3.5.6 Momento de um Binário

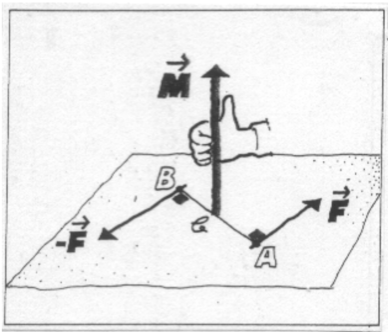
Chama-se **binário (par ou conjugado) de forças** a um sistema de duas forças de módulo igual e sentidos contrários, $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, actuando em linhas de acção paralelas. O plano π, definido pelas linhas de acção das forças, denomina-se plano do binário, e a distância $b = \overline{AC}$ (na figura 3.33 b) entre estas linhas de acção designa-se por **braço do binário**.

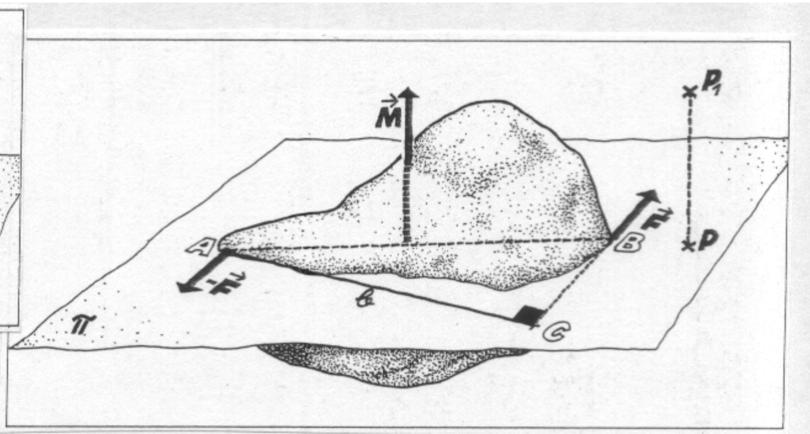
A soma vectorial ou resultante das duas forças (componentes do binário) é, obviamente, o vector nulo:

$$\vec{F}_r = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0} \qquad (3.109)$$

O binário de forças não tem resultante. Como tal, não produz efeito de translação no corpo onde está aplicado. O binário não pode assim ser substituído por uma força única.

O **momento do binário** é o momento resultante do sistema das forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ em relação a um ponto qualquer do espaço.





a) b)

Figura 3.33 - Momento de uma binário de forças.

Para o ponto C do plano π, situado na linha de acção da força $\vec{F}$, temos:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_{C(-\vec{F})} + \vec{M}_{C(\vec{F})} = \overrightarrow{CA} \times (-\vec{F}) + \vec{0} \qquad (3.110)$$

seu módulo é:

$$\left|\vec{M}_C\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| \left|\vec{F}\right| \sin 90^\circ = b\,F \qquad (3.111)$$

Para *outro ponto qualquer*, P por exemplo, temos:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_C + \overrightarrow{PC} \times \vec{F}_r = \vec{M}_C + \overrightarrow{PC} \times \vec{0}$$

o que implica que $\left|\vec{M}_P\right| = \left|\vec{M}_C\right| = \left|\vec{F}\right|\, b$

Sintetizando, podemos afirmar:

1º- O momento de um binário de forças é o mesmo para qualquer ponto do espaço, e designamo-lo, simplesmente, por $\vec{M}$.

2º- O momento de um binário de forças é um **vector livre**, perpendicular ao plano do binário, e de módulo $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right|\, b$.

3º- O binário de forças produz *apenas* efeito rotativo ou de torção, porque, sendo, por definição de binário; $\vec{F}_r = \vec{0}$ e $b \neq 0$, tem *resultante nula* e *momento não nulo*.

4º- O binário, não podendo ser substituído por uma força única, pode, no entanto, ser substituído por outro binário - o chamado **binário equivalente**.

3.5.7 Equilíbrio de uma partícula. Equilíbrio do corpo rígido

Definição de equilíbrio mecânico de um corpo rígido

Diz-se que um **corpo rígido** está em **equilíbrio mecânico**, num referencial inercial, quando as *velocidades dos seus pontos constituintes* não variam em módulo, ou seja quando:

$$\left|\vec{v}\right| = \text{constante}$$

Desta definição deduzem-se, imediatamente, *três estados diferentes de equilíbrio* para um corpo rígido, a saber;

1º - O corpo está em *repouso* num referencial inercial escolhido, quer dizer, a sua velocidade é nula para qualquer ponto do corpo:

$$\left|\vec{v}\right| = 0$$

Trata-se do chamado **equilíbrio estático**.

2º - O corpo está em *movimento de translação rectilíneo uniforme*, num referencial inercial que se escolheu. Isto significa que a velocidade de qualquer ponto do corpo é constante e igual para todos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}$$

É o chamado **equilíbrio dinâmico de translação**.

3º - O corpo tem *movimento de rotação uniforme* em torno de um eixo fixo, num referencial inercial. Nestas condições, todos os pontos do corpo têm a mesma velocidade angular, que, por sua vez é constante:

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constante}}$$

Por isso, é também constante o módulo da velocidade linear de cada ponto, embora este módulo difira de ponto para ponto. Com efeito, sendo,

$$v_i = r_i \omega \qquad (3.112)$$

com r_i o raio da circunferência, centrada no eixo, descrita por cada ponto, é portanto, constante o produto $r_i\omega$ para cada ponto, mas é diferente de ponto para ponto.

A este equilíbrio dá-se o nome de **equilíbrio dinâmico de rotação**.

Equilíbrio de uma partícula

Para que uma partícula esteja em equilíbrio será necessário que se verifique qualquer das condições;

$|\vec{v}| = 0$ (*equilíbrio estático*),

$\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}$ (*m.r.u.* ou *equilíbrio dinâmico de translação*),

às quais corresponde aceleração nula $\underline{\vec{a} = \vec{0}}$, que por sua vez, implica, $\underline{\vec{F}_r = m.\vec{0} = \vec{0}}$

ou seja, a **condição de equilíbrio da partícula** é que seja *nula a resultante de todas as forças* que sobre ela actuam:

$$\vec{F}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \vec{0} \qquad (3.113)$$

- *Condições gerais de equilíbrio do corpo rígido*

O equilíbrio do corpo rígido num dado referencial, resume-se, portanto à **anulação** da sua aceleração $\vec{a}$, na translação, e da sua aceleração angular $\vec{\gamma}$, na rotação:

$$\underline{\vec{a} = \vec{0} \quad , \quad \vec{\gamma} = \vec{0}}$$

são *condições necessárias e suficientes* para que um *corpo rígido esteja em equilíbrio*.

Com efeito, a condição $\vec{F}_r = \vec{0}$ garante o *equilíbrio estático* e o *equilíbrio dinâmico de translação*, já que o sistema de forças não implica qualquer efeito de translação. É por isso que a condição $\underline{\vec{F}_r = \vec{0}}$ se chama **condição da resultante** ou do **equilíbrio de translação**.

Por outro lado, a condição $\vec{M}_0 = \vec{0}$ garante o *equilíbrio de rotação*, já que, sendo nulo o momento, o sistema de forças não implica qualquer efeito rotativo. Esta condição $\underline{\vec{M}_0 = \vec{0}}$ chama-se, por isso, **condição do momento** ou do **equilíbrio de rotação**.

Arbitrariedade na escolha do ponto em relação ao qual se calculam os momentos

Sendo as condições de equilíbrio dadas por $\vec{F}_r = \vec{0}$ e $\vec{M}_0 = \vec{0}$ (em relação a um ponto O), a escolha desse mesmo ponto O é arbitraria, isto é, para qualquer ponto - o momento resultante de todas as forças aplicadas continua a ser nulo.

Momento em relação ao ponto O: $$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad (3.114)$$

Momento em relação ao ponto O': $$\vec{M}_{0'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \qquad (3.115)$$

A relação entre os dois momentos;

$$\vec{r}_i' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}_i \qquad \text{e} \qquad \vec{M}_{0'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{O'O} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i$$

vindo,

$$\vec{M}_{0'} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}_r + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}_r = \vec{M}_0$$

3.5.8 Momento Angular de uma partícula

Consideremos uma partícula de massa m, que se move com velocidade $\vec{v}$. A sua *quantidade de movimento*, é:

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \qquad (3.116)$$

Seja $\vec{r}$ o vector posição da partícula em relação a um ponto O. A grandeza vectorial;

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v} \qquad (3.117)$$

designa-se por ***momento angular*** da partícula em relação a um ponto O, como já sabemos.
A unidade do *momento angular* no S.I. é o $kg\ m^2\ s^{-1}$.

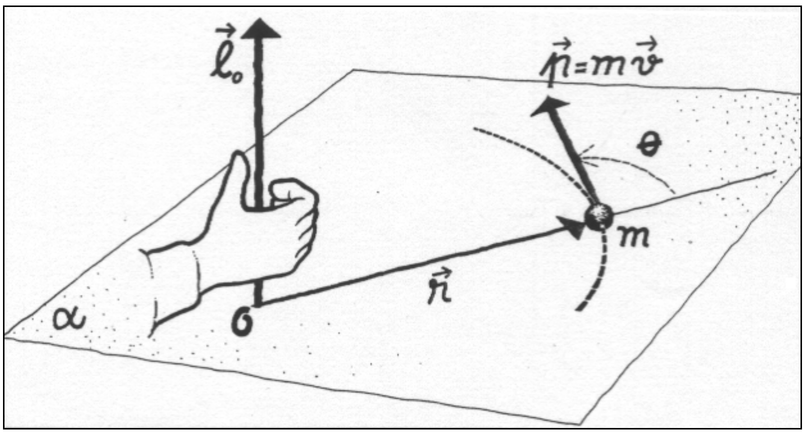


Figura 3.34 - Momento angular de uma partícula.

3.5.9 Momento Angular de um sistema de partículas

No caso de termos um sistema discreto de n partículas, de massas m_1 , m_2 , ..., m_n e quantidades de movimento, respectivamente $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_n$, o ***momento angular do sistema***, em relação ao ponto O, é a ***soma dos momentos angulares*** de cada uma das partículas:

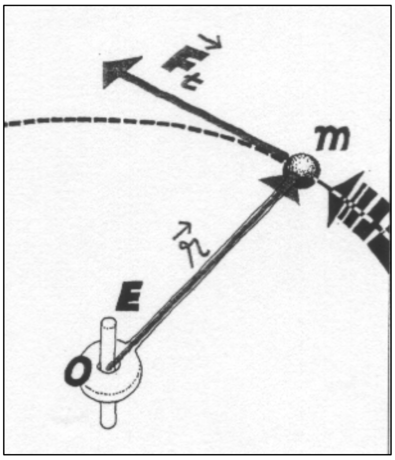
$$\vec{L}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + ... + \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_{0,i} \qquad (3.118)$$

No caso particular e importante de um sólido ter movimento de rotação em torno de um eixo fixo de simetria, o seu momento angular em relação ao eixo é dado pelo produto do momento de inércia pela velocidade angular:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (3.119)$$

3.5.10 Momento Angular de um Corpo Rígido

Comecemos por analisar o *movimento de rotação* de uma partícula de massa *m*, obrigada a girar numa trajectória circular, devido a uma força cuja *componente tangencial*, $\vec{F}_t$, se mantém constante em módulo, (figura 3.35).



O momento é então: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}_t$

e tem por módulo $M_0 = r\, m\, a_t$

como a $a_t = \gamma\, r$ (da derivação de $v = \omega\, r$, γ é a aceleração angular)

$$\text{vem que : } M_0 = (m\, r^2)\, \gamma = I\, \gamma \qquad (3.120)$$

Figura 3.35 – Momento da força tangencial

I (= $m\ r^2$) chama-se **momento de inércia**, da massa pontual *m*, em relação ao ponto *O*, e mede-se em $kg.m^2$.

A relação entre o ***momento da força***, o ***momento de inércia*** da massa pontual girante e a sua ***aceleração angular***, na forma vectorial é:

$$\boxed{\vec{M}_0 = I\vec{\gamma}} \qquad (3.121)$$

com os vectores segundo o eixo de rotação, com o mesmo sentido.

Esta expressão traduz a ***lei de Newton do movimento de rotação***.

Se tivermos um ***sistema de n partículas***, rigidamente ligadas entre si, o momento de inércia resultante corresponde à soma dos momentos de inércia de todas em elas, em relação a um mesmo ponto *O*.

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (3.122)$$

Significado físico do momento de inércia

- Na **translação** a ***massa mede a inércia translativa***, isto é, a maior ou menor resistência oposta pelos corpos à alteração da sua velocidade linear, $\vec{v}$, por acção das forças aplicadas.

- Na **rotação** o ***momento de inércia mede a inércia de rotação***, isto é, a maior ou menor resistência oposta pelos corpos à alteração da sua velocidade angular, $\vec{\omega}$, por acção dos momentos das forças aplicadas.

No caso de corpos rígidos constituídos por sistemas contínuos de partículas, em que o número destas é considerado infinito, temos que:

$$I = \iiint_V r^2 dm \tag{3.123}$$

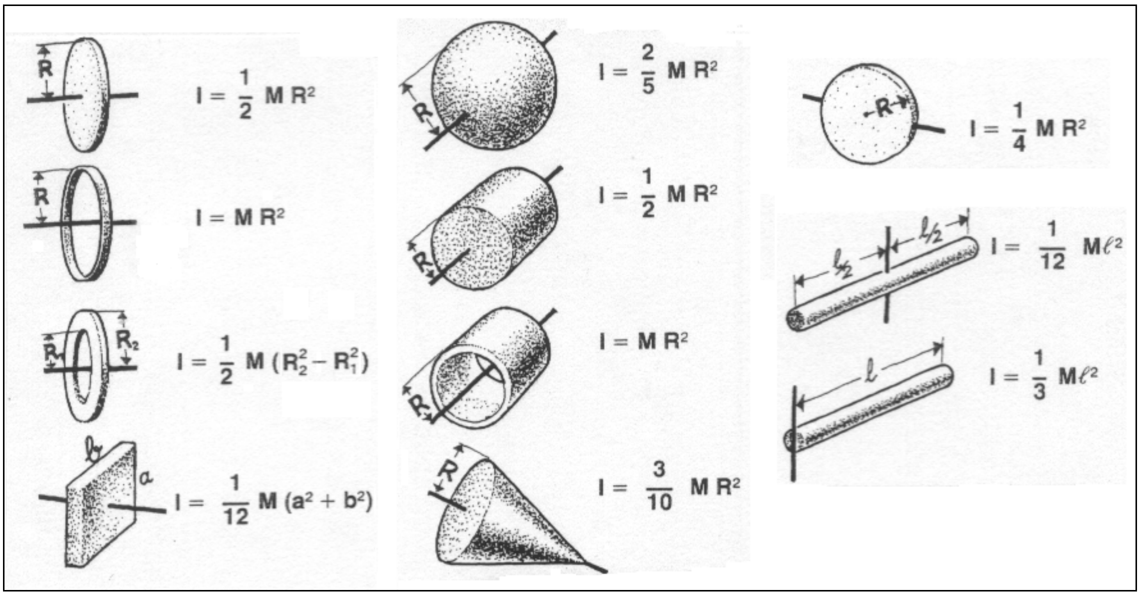


Figura 3.36 - Momentos de inércia de vários corpos de formas regulares, em relação a vários eixos.

Os momentos de inércia relativos a eixos paralelos são relacionados por uma fórmula muito simples. Tomemos Z como um eixo arbitrário e Z_C um seu eixo paralelo passando pelo centro de massa do corpo. Se $\underline{a}$ for a distância de separação entre os dois eixos, a seguinte relação, conhecida como ***teorema de Steiner***, é válida;

$$\boxed{I = I_C + Ma^2} \tag{3.124}$$

onde:
I e I_C são os momentos de inércia do corpo relativamente a Z e Z_C sendo M a sua massa.

(verifique a aplicação do teorema para o caso da barra da figura 3.36)

Podemos igualmente definir o *raio de giração* de um corpo, R, pela relação;

$$I = MR^2 \quad ou \quad R = \sqrt{I/M} \tag{3.125}$$

R representa a distância ao eixo em que toda a massa poderia ser concentrada sem variar o momento de inércia. É uma quantidade útil porque pode ser determinada, para corpos homogéneos, apenas com recurso à geometria.

3.5.11 Lei de variação do Momento Angular

Por analogia, se a variação de momento linear mede os efeitos de translação das interacções, a variação de momento angular mede os respectivos efeitos de rotação.

Como a variação da rotação depende dos momentos das forças exteriores que actuam no corpo, deve haver uma *relação entre este momento resultante* e a *variação do momento angular* do corpo.

Consideremos uma partícula de massa *m*. Num dado instante *t* actua uma força $\vec{F}$, possuindo então a partícula uma dada quantidade de movimento, $\vec{p} = m\,\vec{v}$

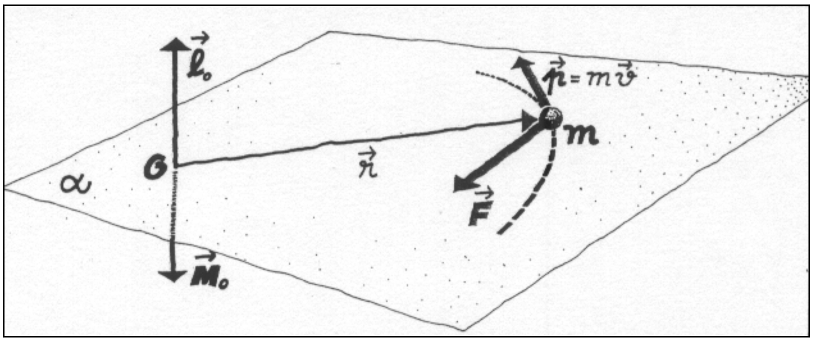


Figura 3.37 - Variação do momento angular.

Aplicando a lei fundamental de Newton, temos, $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

multiplicando externamente por $\vec{r}$, à esquerda, vem:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (3.126)$$

o primeiro membro desta igualdade é o momento da força (em relação a um ponto *O*),

o segundo membro é $\vec{r} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d\vec{l}_0}{dt}$, <u>*derivada do momento angular*</u>, pois;

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Assim,

$$\boxed{\vec{M}_0 = \frac{d\vec{l}_0}{dt}} \qquad (3.127)$$

"o momento, relativamente a um dado ponto, da força que actua numa partícula é igual à taxa de variação temporal do momento angular da partícula em relação a esse ponto"

Se em vez de uma partícula tivermos um sistema rígido de partículas, a taxa de variação temporal do momento angular do sistema, é:

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (3.128)$$

Para o caso de estarmos na presença de um corpo rígido a rodar em torno de um eixo fixo, temos $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (expressão .2125)

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\gamma} \tag{3.129}$$

3.5.12 Lei da conservação do Momento Angular

Quando o momento for nulo, $\vec{M}_0 = \vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\text{constante}}$ (3.130)

"quando a soma dos momentos das forças que actuam num sistema for nula, o vector momento angular do sistema permanece constante"

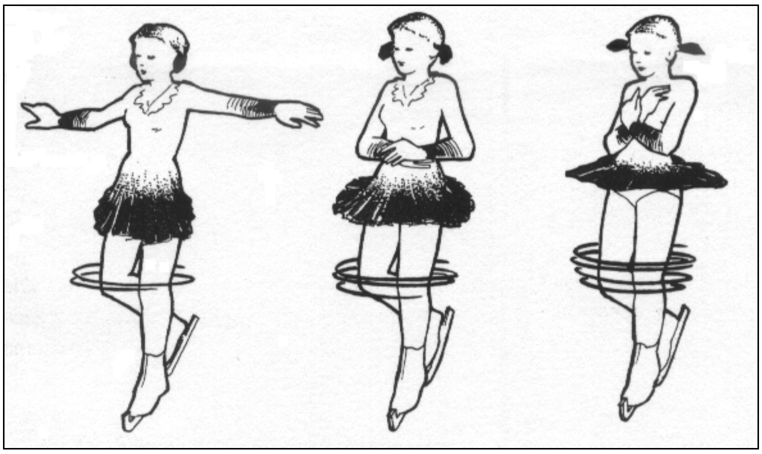


Figura 3.38 - Conservação do momento angular. Patinadora.

3.5.13 Centro de gravidade de um corpo

Consideremos um corpo não muito extenso formado por *n* partículas reais (átomos, moléculas ou iões). Este número *n*, pode ser muito grande, por se tratar de partículas reais. A cada partícula *i* corresponde determinada massa m_i e por isso uma força gravítica $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$, quando está situada num campo gravítico. No caso do campo gravítico terrestre, podemos pensar neste como um campo uniforme; $\vec{g} = \overrightarrow{\text{constante}}$ num local à superfície da Terra, não muito extenso. Por maioria de razão, o campo gravítico será uniforme no espaço ocupado pelo corpo considerado. Em tais condições, as forças gravíticas elementares a que estão sujeitas as partículas reais, $\vec{F}_1 = m_1\vec{g}$, $\vec{F}_2 = m_2\vec{g}$, ..., $\vec{F}_n = m_n\vec{g}$ são forças paralelas.

A resultante dessas forças paralelas, que actuam sobre as partículas elementares, é a *força gravítica* $\vec{F}_g$ aplicada no corpo. A linha de acção desta tem a direcção vertical (aproximadamente para o centro da Terra) e passa pelo centro, G , de forças paralelas. A esse centro dá-se o nome de **centro de gravidade**, naturalmente por ser um centro de forças gravíticas paralelas.

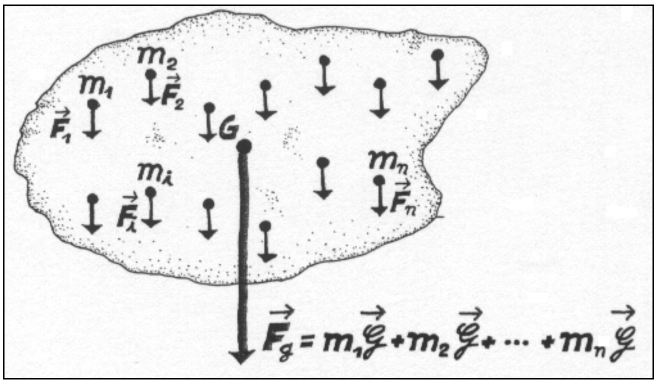


Figura 3.39 - Centro de gravidade de um corpo.

O vector posição do centro de gravidade é dado por:

$$\vec{r}_G = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + \ldots + F_n\vec{r}_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} \tag{3.131}$$

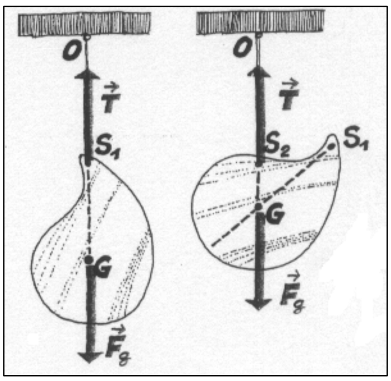
$$\vec{r}_G = \frac{m_1 g\vec{r}_1 + m_2 g\vec{r}_2 + \ldots + m_n g\vec{r}_n}{m_1 g + m_2 g + \ldots + m_n g} \tag{3.132}$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{M} \tag{3.133}$$

(M a massa total do corpo)

No caso de um *sólido* ser *homogéneo* e ter *forma geométrica regular*, há uma distribuição simétrica de forças gravíticas parcelares a actuarem no sólido de tal modo que o *centro de gravidade* é o *centro de figura*. No caso de uma esfera, por exemplo, é o centro da esfera. No caso de uma chapa rectangular é a intersecção das suas diagonais.

No caso de um *sólido* não ser *homogéneo* e (ou) ter *forma irregular*, podemos utilizar a seguinte regra prática (figura 3.40):



1º - suspender o sólido por um dos seus pontos, S_1 , e traçar a vertical correspondente; S_1G.

2º - de seguida suspender por outro ponto, S_2 , e traçar também a vertical correspondente; S_2G.

O centro de gravidade tem de pertencer simultaneamente às duas verticais, pelo que o ponto G é o ponto que pertence e resulta da intersecção dessas duas linhas.

Figura 3.40 - Determinação prática do centro de gravidade.

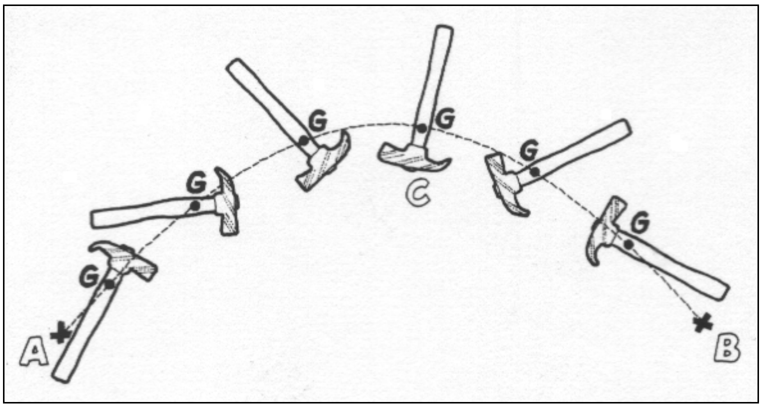


Figura 3.41 - Movimento parabólico do centro de gravidade/massa
de um corpo, num campo gravítico uniforme.

Se tivermos um corpo rígido girando em torno de um eixo, em geral o momento angular $\vec{L}$ *não é paralelo* ao eixo de rotação.
Haverá no entanto algum eixo de rotação, para o qual o momento angular total é paralelo ao eixo ?

Para qualquer corpo rígido, independentemente da sua forma há sempre (pelo menos) três direcções mutuamente perpendiculares para as quais o momento angular é paralelo ao eixo de rotação. São os chamados ***eixos principais de inércia***, e os momentos de inércia correspondentes são chamados ***momentos principais de inércia***.

3.5.14 Equação do movimento para a rotação de um corpo rígido

Já vimos a relação entre o momento da força aplicada e a variação do momento angular de um corpo rígido. Consideremos agora um corpo rígido que gira em redor de um eixo principal, com um ponto fixo num sistema inercial. Do momento da força em relação a este ponto fixo no eixo principal, vem:

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\gamma} \qquad (3.134)$$

com o eixo a permanecer fixo, relativamente ao corpo rígido e o momento de inércia também constante.

$$\boxed{\vec{M}_0 = I\vec{\gamma}}$$

Esta equação (que já tínhamos visto), tem uma grande semelhança com a do movimento de translação de um corpo (lei fundamental da dinâmica). A massa m é substituída pelo momento de inércia I , a velocidade $\vec{v}$ pela velocidade angular $\vec{\omega}$, a aceleração $\vec{a}$ pela aceleração angular $\vec{\gamma}$, e a força $\vec{F}$ pelo momento da força $\vec{M}$.

"um corpo rígido que gire em torno de um eixo principal, move-se com velocidade angular constante, quando sobre ele não existe nenhum momento externo"

que podemos considerar como a *<u>lei de inércia para o movimento rotacional</u>*.

Quando o eixo de rotação não tem um ponto fixo num referencial inercial, devemos calcular os momentos angulares e os momentos das forças exteriores relativamente ao centro de massa do corpo;

$$\vec{M}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} \qquad (3.135)$$

Exemplo:

Um disco com 0,5 *m* de raio e 20 *kg* de massa gira livremente em torno de um eixo horizontal passando pelo seu centro (figura 3.42). Aplica-se uma força de 9,8 N puxando-se um fio enrolado no seu bordo. Qual a aceleração angular e a sua velocidade após 2 *s*?

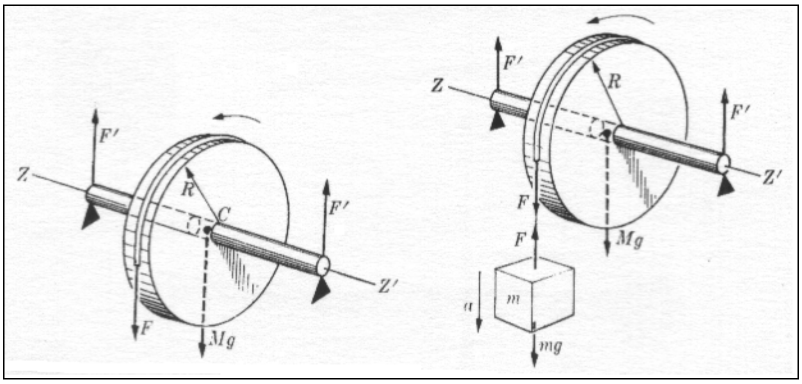


Figura 3.42 - Disco com R = 0,5 *m* e 20 *kg* de massa, girando livremente em torno do seu eixo horizontal.

Só temos de considerar o momento da força aplicada no fio, em módulo $M_C = R\,F$. Como $I_C = \frac{1}{2}MR^2$ (figura 3.36), vem que:

$$RF = \tfrac{1}{2}MR^2\gamma$$

a aceleração γ será então: $$\gamma = \frac{2F}{MR} = \frac{2x9{,}8}{20x0{,}5} = 1{,}96\ rad\ s^{-2}$$

a velocidade angular após 2s, se o disco partiu do repouso, será;

$$\omega = \gamma\ \mathrm{t} = 1{,}96 \times 2 = 3{,}92\ rad\ s^{-1}$$

3.5.15 Energia cinética de rotação

A energia cinética de translação de um sistema de partículas foi definida como;

$$E_C = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (3.136)$$

No caso de um corpo rígido que gira em torno de um eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$, a velocidade de cada partícula é $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ (em módulo $v = \omega\, r$), onde r_i é a distância da partícula *i* ao eixo de rotação. Então, em relação ao eixo;

$$E_{CR} = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \qquad (3.137)$$

mas, da definição de momento de inércia, temos;

$$E_{CR} = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad (3.138)$$