

• Engenharia Civil • Exercícios de Física •

• **Ficha 1 • Cálculo Vectorial, Derivadas e Primitivas • Capítulo 0 •**

Conhecimentos e capacidades que o aluno deve adquirir:

Propriedades dos vectores. Operações com vectores: adição, subtracção, produto escalar e produto vectorial. Módulo e vector unitário. Referencial cartesiano 2D e 3D. Sistema de coordenadas polares, expressões de transformação entre sistemas. Derivadas e Primitivas de funções polinomiais e trigonométricas. Representação de funções e análise de gráficos.

Cálculo numérico de funções trigonométricas – uso de máquina de calcular científica

1. - Considere o seguinte conjunto de vectores definidos por:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{u}_x + 4\vec{u}_y & \vec{b} &= -2\vec{u}_x + 5\vec{u}_y & \vec{c} &= -\vec{u}_x - 5\vec{u}_y \\ \vec{d} &= -4\vec{u}_x & \vec{e} &= -3\vec{u}_y & \vec{f} &= \vec{u}_x - 4\vec{u}_y\end{aligned}$$

1.1 Represente cada um dos vectores num sistema de eixos coordenados XY.

1.2 Determine o valor do módulo de cada um dos vectores e o ângulo que cada vector faz com o eixo do XX.

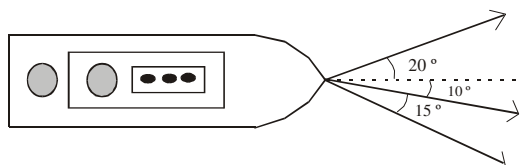
1.3 Determine o módulo dos seguintes vectores:

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{d} \quad \vec{v} = 2\vec{b} + ((1/2)\vec{c}) - \vec{f}$$

R.: 1.2 $2\sqrt{5}$, $\approx 63.43^\circ$; $\sqrt{29}$, $\approx 111.80^\circ$; $\sqrt{26}$, $\approx 258.69^\circ$; 4, 180° ; 3, 270° ; $\sqrt{17}$, $\approx 284.04^\circ$; 1.3 $2\sqrt{5}$, ≈ 12.75

2. - Um jogador de golfe dá três tacadas para colocar a sua bola num buraco do *green*. A primeira tacada desloca a bola 150 m para sul, a segunda 20 m para sudeste e a terceira 5 m para norte. Determinar o deslocamento necessário para colocar a bola nesse buraco com uma só tacada.

3. - Um transatlântico avariado é rebocado por três rebocadores como mostra a figura. Sabendo que a tensão em cada cabo é de 500 kN, determinar a força resultante que actua na proa do navio, utilizando as componentes das forças num sistema de eixos ortogonais.



R.: $\vec{T} = 1,415 \times 10^6 \vec{u}_x - 1,27 \times 10^5 \vec{u}_y$ N



www.aif.estt.ipt.pt

Instituto Politécnico de Tomar

Escola Superior de Tecnologia de Tomar

ÁREA INTERDEPARTAMENTAL DE FÍSICA

4. - Dado o vector $\vec{a} = 2\vec{u}_x + \vec{u}_y + 2\vec{u}_z$, calcule:

4.1 o módulo de $\vec{a}$;

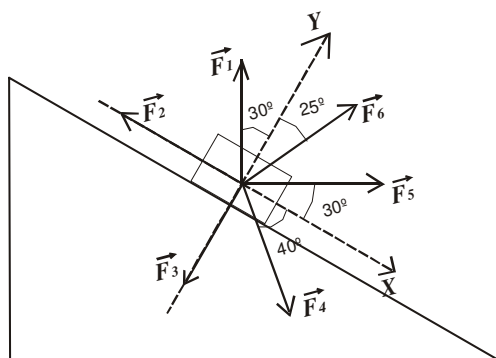
4.2 o vector unitário segundo a direcção de $\vec{a}$;

4.3 o ângulo que $\vec{a}$ forma com o vector $\vec{b} = 3\vec{u}_x - 4\vec{u}_y$.

R.: 4.1 3, 4.3 $\approx 82.^\circ 337$

5. - Prove que, se a soma e a diferença de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vectores perpendiculares entre si, então $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

6. - Determine as componentes dos vectores representados na figura, segundo as direcções XX e YY. Suponha que $|\vec{F}_i| = 100$ unidades para $i = 1, 2, \dots, 6$.



7. - Dados os vectores: $\vec{a} = -3\vec{u}_x - 5\vec{u}_y$, $\vec{b} = 2\vec{u}_x$ e $\vec{c} = 4\vec{u}_x - 3\vec{u}_y$, determine:

7.1 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

7.2 $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{b} \wedge \vec{c}$, $\frac{3}{2}(\vec{a} \wedge \vec{c}) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

R.: 7.1 -6, 8, -14 7.2 $10\vec{u}_z$, $-6\vec{u}_z$, $48\vec{u}_x - 36\vec{u}_y + \frac{87}{2}\vec{u}_z$

8. - Um vector $\vec{a}$ tem módulo de 10 unidades e um outro vector $\vec{b}$ tem módulo de 6 unidades. A direcção que o primeiro forma com o segundo é de 60° .

8.1 Determine os produtos escalares de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, $\vec{b}$ por $\vec{a}$, $\vec{a}$ por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ por $\vec{b}$.

8.2 Determine os produtos vectoriais $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{b} \wedge \vec{a}$ e $\vec{b} \wedge \vec{b}$.

8.3 Mostre que o módulo de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ é numericamente igual à área do paralelogramo que tem os vectores por lados.

R.: 8.1 30, 30, 100, 36 8.2 $51,96\vec{u}_n$, $-51,96\vec{u}_n$, $\vec{0}$



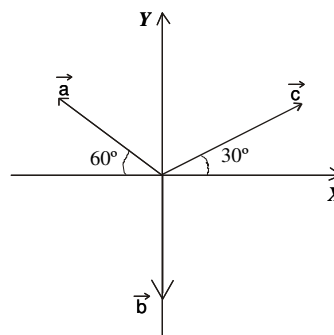
www.aif.estt.ipt.pt

Instituto Politécnico de Tomar

Escola Superior de Tecnologia de Tomar

ÁREA INTERDEPARTAMENTAL DE FÍSICA

9. - Considere os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ representados no sistema de eixos da figura. O vector $\vec{c}$, tem módulo igual a 100 unidades. Calcule os valores dos módulos dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de modo a que o vector resultante da soma de todos os vectores seja nulo.



R.: $|\vec{a}| = 173,2$, $|\vec{b}| = 200$

10. - Considere o conjunto de vectores representados no sistema de eixos da figura.

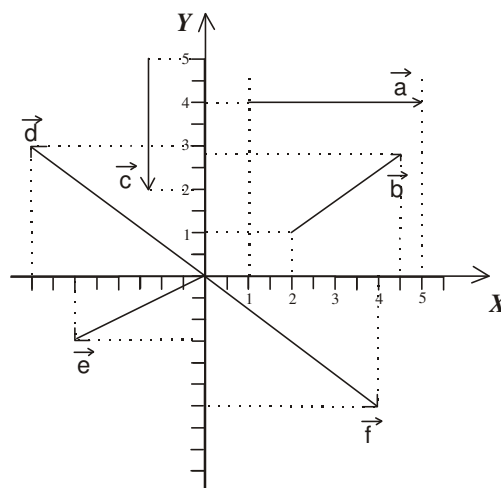
10.1 Determine o módulo e o valor do ângulo que cada um dos vectores faz com o eixo horizontal.

10.2 Determine as componentes cartesianas dos seguintes vectores:

$$\vec{u} = (\vec{a} + \vec{d}) - 2\vec{c} \quad , \quad w = (\vec{f} \wedge \vec{e}) \cdot 4\vec{a}$$

$$\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{e} \quad , \quad \vec{z} = \left(\frac{2}{3}\right)\vec{d} + 4\vec{b} - \left(\frac{1}{4}\right)\vec{f}$$

10.3 Determine o módulo e o valor do ângulo que cada um dos vectores calculados na alínea anterior faz com o eixo vertical.



R.: 10.1 4 , 0° ; $\sqrt{10,25}$, $\approx 38.^\circ 66$; 3 , 270° ; 5, $\approx 143.^\circ 13$; $\sqrt{11,25}$, $\approx 206.^\circ 56$; 5 , $\approx 323.^\circ 13$

11. - Dois pontos num plano têm as coordenadas polares (2,50 m, 30°) e (3,80 m, 120°). Determine:

11.1 as coordenadas cartesianas desses pontos,

11.2 a distância entre eles.

12. - Converta para coordenadas polares dos seguintes pontos;

12.1 (3,0 , 5,0)

12.2 (-4,5 , 2,3)

12.3 (1,5 , -4,3)

12.4 (-5,6 , -2,5)

13. - Converta para coordenadas cartesianas dos seguintes pontos;

13.1 (3,5 , 25°)

13.2 (2,5 , 90°)

13.3 (2,4 , 135°)

13.4 (4,6 , 265°)

14. - Calcule os valores de $\sin(15,5^\circ)$ e $\sin(75,5^\circ)$, usando a expansão polinomial da série de Taylor com $n = 3$ e $n = 5$, a 10 casas decimais. Comparar com o resultado da máquina de calcular.

15. - Calcule as derivadas de 1ª ordem e as primitivas em ordem a t das seguintes funções:

15.1 $7, -2t, \sqrt{3t^2}, \frac{1}{2} + e^{-1}t - t^3, \sin(t), \cos(t), 5\sin(2t-4), -\cos(\pi t-2)$

15.2 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{i} - 2t\hat{j} + \sqrt{3}\hat{k}, 3t\hat{i} - t^2\hat{j} + \frac{1}{2}t^{-1}\hat{k}$

15.3 $\sin^2(t), \cos^2(t), t \sin(t), \cos^2(t) \sin(t), \ln(t)$

16. - Considere três funções $f(x), g(x)$ e $h(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x) = f'(x) \\ h(x) = g'(x) \end{cases}$$

16.1 Supondo que a função $g(x)$ é definida pela expressão $g(x) = -\frac{5}{3}x - 6$, determine as expressões matemáticas das funções $f(x)$ e $h(x)$.

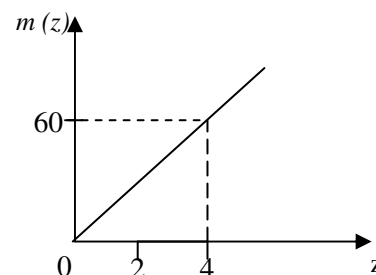
16.2 Supondo que a função $h(x)$ é definida pela expressão $h(x) = -8$ determine as expressões matemáticas das funções $g(x)$ e $f(x)$.

17. - Considere três funções $l(z), m(z)$ e $n(z)$. A função $m(z)$ está representada na figura. Sabendo que $n(z) = m'(z)$, $m(z) = l'(z)$ e que $l(0)=5$, determine:

17.1 a expressão matemática da função $m(z)$ no intervalo $[0,4]$;

17.2 a expressão matemática das funções $l(z)$ e $n(z)$ no intervalo $[0,4]$;

17.3 a área do gráfico no intervalo $[0,4]$, pelo método das áreas e pelo método integral.

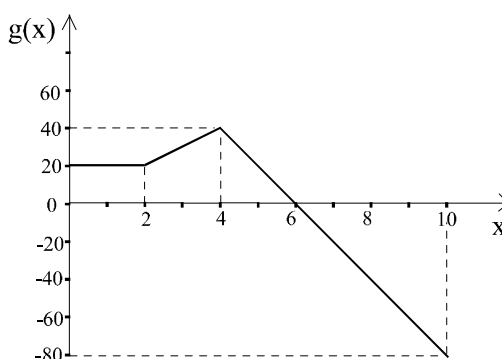


18. - Considere três funções $f(x), g(x)$ e $h(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x) = f'(x) \\ h(x) = g'(x) \end{cases}$$

O gráfico anexo representa a função $g(x)$.

Determine:



18.1 as expressões matemáticas de $g(x)$ para os intervalos $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$ e $[6,10]$;

18.2 as expressões matemáticas de $h(x)$ para os mesmos intervalos e represente-a graficamente;

18.3 as expressões matemáticas de $f(x)$ para os mesmos intervalos e represente-a graficamente;

18.4 a área de cada intervalo referido, para a função $g(x)$, pelo método das áreas e pelo método integral.