Capítulo 7 – Movimento Vibratório

Dos movimentos encontrados na natureza, um dos mais importantes é o movimento oscilatório (ou vibratório). Uma partícula tem oscilação quando se move periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio. O movimento de um pêndulo é oscilatório. Um peso amarrado na extremidade de uma mola esticada, oscila ao ser abandonado. Os átomos num sólido estão em vibração. Os electrões, numa antena transmissora ou receptora, executam rápidas oscilações. A compreensão do movimento vibratório é fundamental para a compreensão de fenómenos ondulatórios.

7.1 Oscilador harmónico a uma dimensão

De todos os movimentos oscilatórios, o mais importante é o *movimento harmónico simples* (*MHS*), porque, além de ser o movimento mais simples para se descrever matematicamente, constitui uma descrição bastante precisa de muitas oscilações encontradas na natureza.

7.2 Cinemática do Movimento Harmónico Simples

7.2.1 Amplitude, Fase inicial, Período e Frequência Angular

Por definição, dizemos que uma partícula executa um movimento harmónico simples ao longo do eixo X (por exemplo) quando o seu deslocamento (elongação) x em relação à origem do sistema de coordenadas, é dado, como função do tempo, pela relação;

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ (m)} \tag{7.1}$$

A grandeza $\omega t + \varphi_0$ é denominada fase, com φ_0 a *fase inicial* - o valor da fase para $t = 0$ s. O movimento harmónico simples é aqui expresso em termos da função sin, mas poderíamos ter utilizado a função cos (ambas são funções sinusoidais), sendo que a única diferença é uma diferença de $\pi/2$ na fase inicial. Como a função sin (e cos) varia entre -l a +1, o deslocamento da partícula varia entre x = -A (m) e x = +A (m). A *elongação máxima*, **A**, em relação à origem, é a *amplitude do movimento* harmónico simples. A função sin repete-se cada vez que o ângulo varia de 2π. Logo, o deslocamento da partícula repete-se após um intervalo de tempo de $2\pi/\omega$. Portanto o movimento harmónico simples é periódico, de *período* $T = 2\pi/\omega$ (em s). A *frequência* f de um movimento harmónico simples é igual ao número de oscilações, por unidade de tempo; assim, $f = 1 / T$ (Hz ou s^{-1}).

A grandeza ω denominada *frequência angular* (ou *velocidade angular*) da partícula oscilante, está relacionada com a frequência pela seguinte expressão (semelhante para o movimento circular);

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{rad s}^{-1}) \tag{7.2}$$

A velocidade da partícula, virá;

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{m s}^{-1}) \tag{7.3}$$

Analogamente, a aceleração é descrita por;

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{m s}^{-2}) \tag{7.4}$$

e mostra que, num movimento harmónico simples (MHS), a aceleração é sempre proporcional e de sentido oposto ao deslocamento. Na figura 7.1 são apresentados os gráficos de x, v, e a em função do tempo.

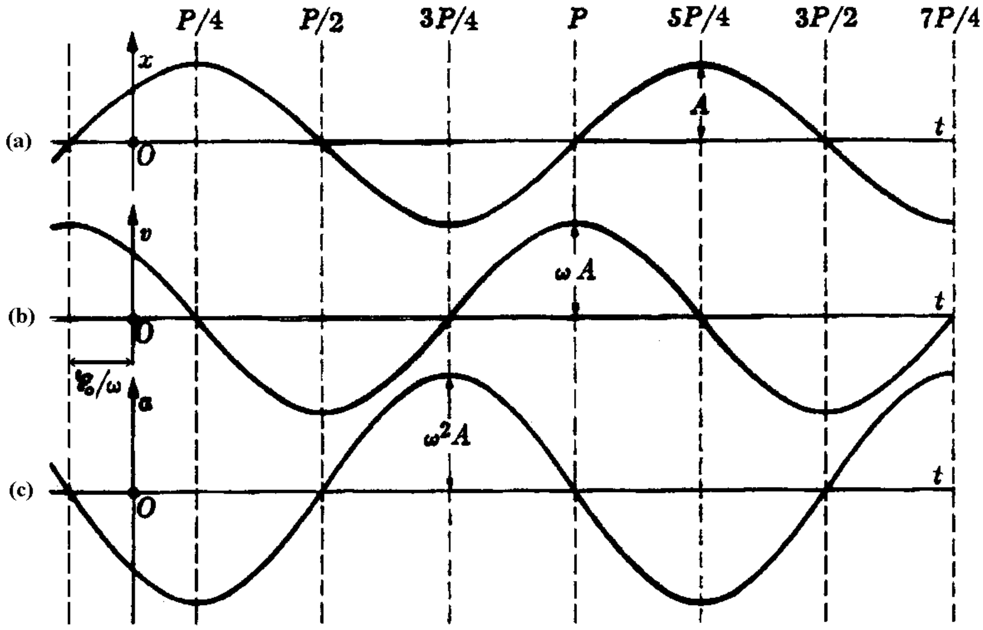


Figura 7.1 - Gráficos do deslocamento (x), da velocidade (v) e da aceleração (a) em função do tempo, no M.H.S.

O deslocamento da partícula, que se move com MHS, pode ser considerado como a componente X de um *vector girante* $\overline{OP'}$, com $\overline{OP'}$ = A, que gira no <u>sentido directo</u> (anti-horário), em torno de O, com velocidade angular ω e que faz (em cada instante) um ângulo $\omega t + \varphi_0$, também medido no sentido directo, com o eixo negativo do Y. Na figura 7.2, está representado o vector $\overline{OP'}$ em varias posições sucessivas ((a), (b) e (c)). Podemos verificar, que a qualquer instante, a componente x de $\overline{OP'}$ é $x = \overline{OP'}\sin(\omega t + \varphi_0,)$.

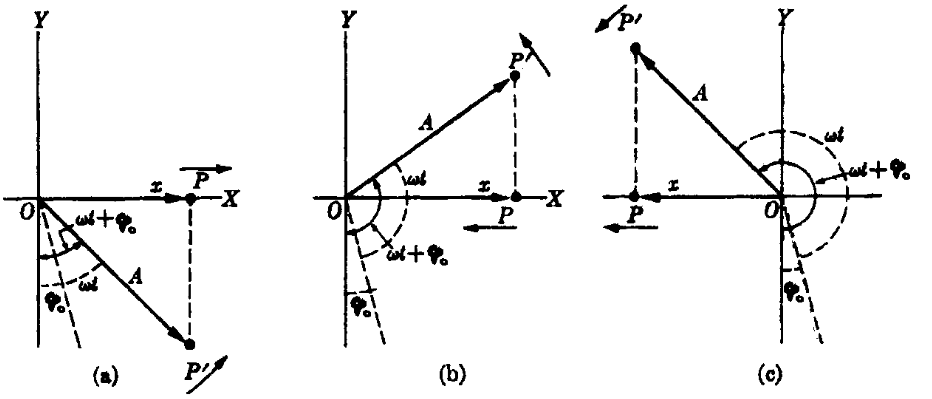


Figura 7.2 - Vector girante para o deslocamento, no M.H.S.

A *velocidade* e *aceleração* da partícula também podem ser representadas por ***vectores girantes*** $\overline{OV'}$ e $\overline{OA'}$, cujos comprimentos são, respectivamente. $\boldsymbol{\omega}\mathbf{A}$ e $\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{A}$ e cujas componentes projectadas ao longo do eixo X dão a velocidade v e a aceleração a da partícula que se move com M.H.S.. Pode-se ver que $\overline{OV'}$ e $\overline{OA'}$ estão, respectivamente, adiantados de $\pi/2$ e π, em relação ao vector girante $\overline{OP'}$.

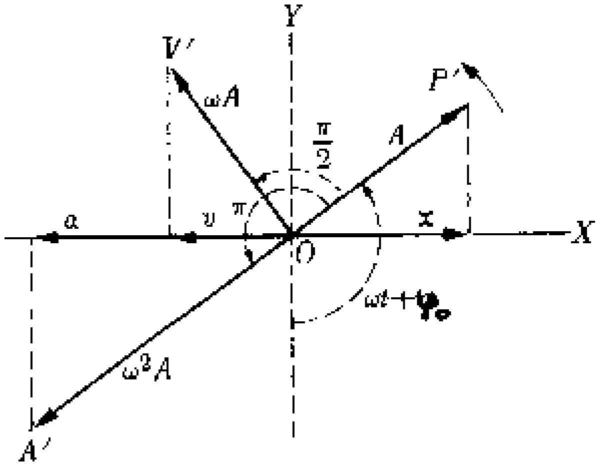


Figura 7.3 - Representação simultânea dos vectores girantes para o deslocamento (x), velocidade (v) e aceleração (a) no M.H.S..

7.2.2 Força e Energia no Movimento Harmónico Simples

Da expressão da aceleração no M.H.S.;

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t) \qquad (7.5)$$

podemos obter a força que actua sobre uma partícula de massa m para que esta oscile com movimento harmónico simples. Aplicando a equação fundamental da dinâmica F = ma, e substituindo a aceleração, temos:

$$F = -m\,\omega^2\,x = -\,k\,x \qquad (7.6)$$

onde colocamos,

$$k = m\,\omega^2 \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{k/m} \qquad (7.7)$$

Este resultado indica que num movimento harmónico simples, a força é proporcional e de sentido contrário ao deslocamento. Assim, o vector força aponta sempre para a origem O, (mas esse é o ponto de equilíbrio, pois, na origem, F = 0 N, porque x = 0 m). Também podemos dizer (considerar) que a força F é atractiva e o centro de atracção é o ponto O. Esta força é o tipo de força que aparece quando se deforma um corpo elástico como, por exemplo, uma mola. A constante $\mathbf{k} = m\,\omega^2$, às vezes chamada *constante elástica*, representa a força necessária para deslocar a partícula de uma distância unitária (o aluno deve aqui reconhecer a *famosa* lei de Hooke).

Podemos agora extrair as expressões:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad\qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.8)$$

que nos dão, respectivamente o período e a frequência de um movimento harmónico simples em função de m - massa da partícula e k - constante elástica da força aplicada.

A energia cinética da partícula é:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m A^2 \omega^2 \ \cos^2(\omega t + \varphi_0) \tag{7.9}$$

mas da igualdade trigonométrica ($\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$) temos,

$$E_c = \tfrac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) \ \text{(J)} \tag{7.10}$$

Notemos que a *energia cinética é máxima no centro* (x = 0 m) e *nula nos extremos de oscilação* ($x = \pm$ A m).

Para obter a energia potencial (lembremo-nos do capítulo 4) que F = - dE_p/dx, vindo;

$$\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x = \mathrm{k}x \tag{7.11}$$

Integrando (escolhendo o zero da energia potencial na origem), obtemos;

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kxdx \quad \text{ou} \qquad E_p = \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{7.12}$$

Portanto a *energia potencial é mínima (nula) no centro* (x = 0 m} e *aumenta à medida que a partícula se aproxima dos extremos de oscilação* ($x = \pm$ A m). Somando ambas as energias (cinética e potencial), obtemos, para a energia total do oscilador harmónico simples;

$$E = E_c + E_p = \tfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \tfrac{1}{2} kA^2 \tag{7.13}$$

que é um valor constante (este resultado era de se esperar, pois a força é conservativa). Podemos portanto dizer que, durante uma oscilação, há uma troca contínua de energias cinética e potencial. Quando a partícula se afasta da posição de equilíbrio, a energia potencial aumenta, enquanto que a cinética diminui; o inverso ocorre quando a partícula se aproxima da posição de equilíbrio.

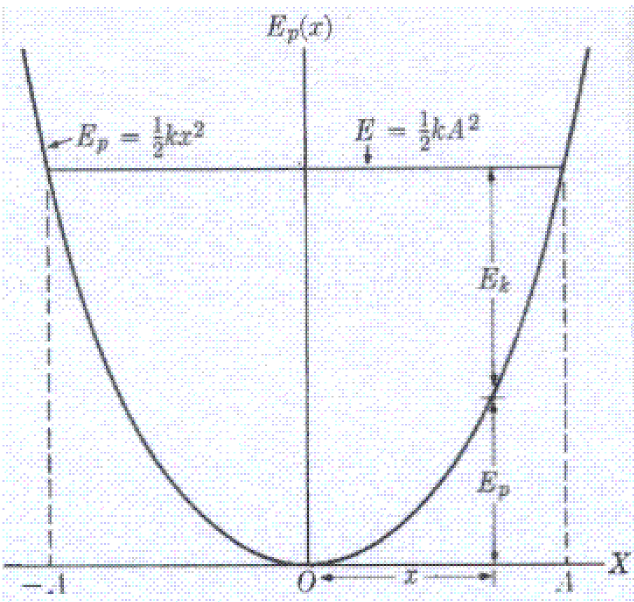


Figura 7.4 - Representação da relação entre as energias no M.H.S..

A figura 6.4 mostra a energia potencial, $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ representada por uma parábola. Para uma dada energia total E, representada pela linha horizontal, os limites de oscilação são determinados pelas interseções dessa horizontal com a curva da energia potencial. Como a parábola E_p é simétrica, os limites de oscilação estão a distâncias iguais, ± A, de O. Para qualquer ponto x, a energia cinética E_c é dada pela distância entre a curva $E_p(x)$ e a linha E.

7.3 Dinâmica do Movimento Harmónico Simples

Vamos agora discutir o problema inverso: provaremos que, dada uma força atrativa proporcional ao movimento (isto é, F = - kx), o movimento resultante é harmónico simples.

Um procedimento é partir da equação de movimento, F = ma, com F = - kx e, lembrando que no movimento rectilíneo $a = d^2x/dt^2$, escrever a equação;

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{ou} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{7.14}$$

com, $\omega^2 = k/m$, podemos escrever;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{7.15}$$

Esta expressão é uma equação diferencial cujas soluções são funções sinusoidais de ωt. Substituindo x por A sen ($\omega t + \varphi_0$), podemos verificar directamente que essa expressão para x, que corresponde ao movimento harmónico simples, satisfaz a equação acima. Logo, dizemos que **x = A sen ($\omega t + \varphi_0$)** , é a solução geral da equação diferencial, porque tem duas constantes arbitrárias, a amplitude A e a fase inicial φ_0. Portanto verificamos que *uma força atractiva proporcional ao deslocamento produz movimento harmónico simples*.

Esta equação aparece em muitas situações na física. Sempre que ela aparece, o fenómeno correspondente é oscilatório e obedece à lei A sen($\omega t + \varphi_0$), sendo que ela pode estar descrevendo um deslocamento linear ou angular de uma partícula, uma corrente num circuito eléctrico, a concentração de iões num plasma, a temperatura de um corpo ou inúmeras outras situações físicas.

Exemplo: discutir a solução da equação diferencial para o movimento harmónico simples em termos do deslocamento inicial x_0 e da velocidade inicial v_0.

A solução geral é: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, logo $x_0 = A\sin(\varphi_0)$ e $v_0 = A\omega\cos(\varphi_0)$

de onde; $tg(\varphi_0) = \omega x_0 / v_0$ e $A = (x_0^2 + v_0^2/\omega^2)^{1/2}$

Por exemplo, se a partícula está inicialmente na posição de equilíbrio $x_0 = 0$ e recebe um impulso que lhe imprime uma velocidade v_0, temos $\varphi_0 = 0$ e $A = v_0/\omega$.
Por outro lado, se a partícula é afastada de uma distância x_0 da posição de equilíbrio e, em seguida, abandonada, temos $v_0 = 0$, e, portanto, tg $\varphi_0 = \infty$ ou $\varphi_0 = \pi/2$ e $A = x_0$.

7.4 Movimento de um pêndulo

7.4.1 Pêndulo Gravítico Simples

Um exemplo de movimento harmónico simples é o movimento de um pêndulo (dito gravítico). Um pêndulo simples é definido como uma partícula de massa ***m*** ligada, num ponto **O**, por um fio de comprimento ***l*** e massa desprezível (figura 7.5). Se a partícula for afastada lateralmente até a posição **B**, onde o fio faz um ângulo $\boldsymbol{\theta_0}$ com a vertical OC, e, em seguida, abandonada, o pêndulo oscilará entre **B** e a posição simétrica **B'**.

Para determinar o tipo de oscilação observado, precisamos escrever a equação de movimento da partícula. A partícula move-se num arco de círculo com raio l = OA. As forças que agem sobre a partícula são o peso $m\vec{g}$ e a tensão $\vec{T}$ no fio. A componente tangencial da força resultante é, pela figura 7.5;

$$F_T = -mg\ sen\theta \qquad (7.16)$$

(o sinal negativo aparece porque considerámos um referencial positivo para a direita).

A equação para o movimento tangencial é $F_T = ma_T$, e como a partícula se move ao longo de um círculo de raio l (constante), podemos exprimir a aceleração tangencial como :

$$a_T = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (7.17)$$

A equação para o movimento tangencial é, portanto;

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ sen\theta \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\ sen\theta = 0 \qquad (7.18)$$

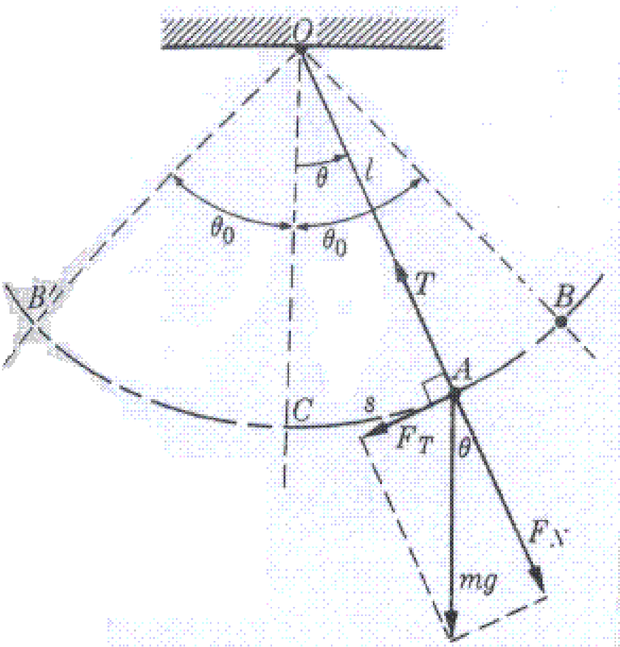


Figura 7.5 - Movimento oscilatório de um pêndulo.

Essa equação não é do mesmo tipo da encontrada anteriormente (expressão 7.15) devido à presença de *sen* θ. Entretanto, se o ângulo θ é pequeno, o que é verdadeiro para pequenas amplitudes de oscilação, podemos usar a aproximação e escrever $sen\ \theta \approx \theta$ para o movimento do pêndulo que, então se reduz a;

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (7.19)$$

Essa equação diferencial é já idêntica à anteriormente descrita, com x foi substituído por θ, sendo que, desta forma, ela se refere a um movimento angular e não linear. Assim, concluímos que, dentro de nossa aproximação, o movimento angular do pêndulo é harmónico simples, com $\omega^2 = g / l$. O ângulo θ pode ser, desse modo expresso na forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{(rad)} \qquad (7.20)$$

Podemos escrever o período de oscilação como;

$$T = 2\pi/\omega \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (7.21)$$

Vemos assim, que o período é independente da massa do pêndulo. Para amplitude maiores, a aproximação $sen\ \theta \approx \theta$ não é válida. Nesse caso a fórmula para o período depende da amplitude θ_0 .

A fórmula geral para o período, vem expressa sob a forma de uma série,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}sen^2\,\tfrac{1}{2}\theta_0 + \tfrac{9}{64}sen^4\,\tfrac{1}{2}\theta_0 + \ldots\right) \quad \text{(s)} \qquad (7.22)$$

A variação de T com a amplitude θ_0 ,.expressa em termos do período $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ correspondente a amplitudes muito pequenas, está ilustrado na figura 7.6. De notar que somente para amplitudes muito grandes é que o período difere apreciavelmente de T_0. Para pequenas amplitudes, é suficiente tomar apenas o primeiro termo de correcção; e podemos ainda fazer a substituição de $sen\tfrac{1}{2}\theta_0$ por $\tfrac{1}{2}\theta_0$, vindo como resultado;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{16}\theta_0^2\right) \qquad (7.23)$$

onde θ_0 deve vir expresso em radianos. Essa é uma aproximação suficiente para a maioria das situações práticas. De facto, o termo de correcção $\dfrac{\theta_0^2}{16}$ contribui com menos de 1 % para o valor total do período, nas oscilações menores que 23°.

[Nota: a notação de período pode ser T (de *Time*) ou por vezes P (de Período), consoante a fonte bibliográfica considerada]

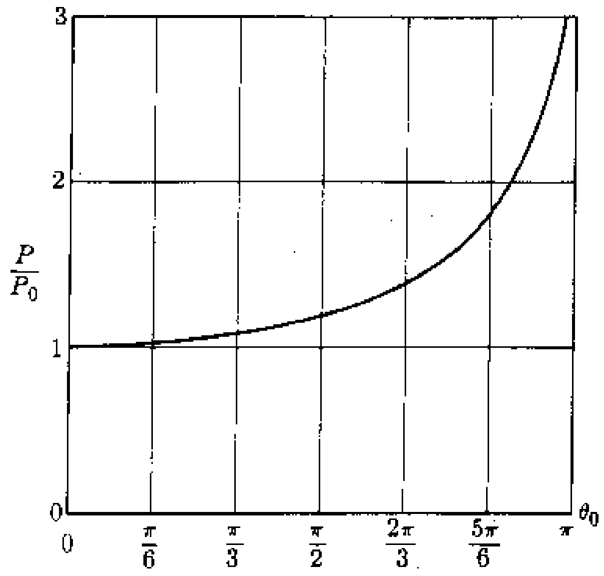


Figura 7.6 - Variação do período de um pêndulo com a amplitude de oscilação.

(Há, entretanto, um sistema especial em que o período de um pêndulo é independente da amplitude. É o *pêndulo cicloidal*. **Ciclóide** é uma curva gerada por um ponto na borda de um disco que rola num plano. Se construirmos, num plano vertical, uma trajectória com a forma de uma ciclóide e deixarmos uma massa m deslizar ao longo dela, num movimento oscilatório, sob a acção da gravidade, a amplitude do movimento dependerá do ponto em que a partícula for abandonada, mas o período será sempre $T = 4\pi\sqrt{a/g}$, onde a é o raio do círculo que gera a ciclóide.)

7.5 Princípio da Sobreposição

7.5.1 Sobreposição de dois M H S: mesma direcção e mesma frequência

Consideraremos agora a sobreposição (interferência) de dois movimentos harmónicos simples que dão o deslocamento da partícula ao longo de uma mesma recta. Veremos inicialmente o caso em que ambos têm a mesma frequência (figura 7.7). O deslocamento da partícula, produzido por cada movimento harmónico simples, é dado por.

$$x_1(t) = OP_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \quad \text{e} \quad x_2(t) = OP_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \qquad (7.24)$$

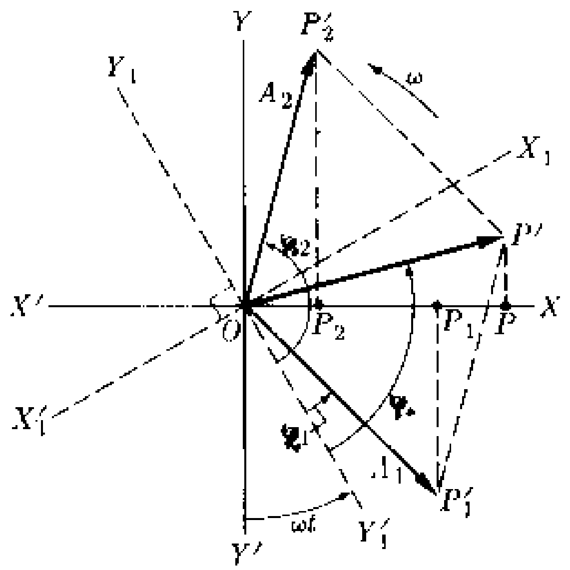


Figura 7.7 - Composição de dois MHS de igual frequência e direcção de vibração.

O deslocamento resultante da partícula é dado por:

$$x = OP = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \qquad (7.25)$$

Provaremos que x também corresponde a um movimento harmónico simples com a mesma frequência. Observamos que a componente X do vector OP', soma dos vectores girantes OP'_1 e OP'_2, é justamente a soma das componentes X de OP'_1 e OP'_2, (isto é, $x_1 + x_2$) e portanto, é igual a x. Além disso, como o ângulo entre OP'_1 e OP'_2 tem um valor fixo $\delta = \varphi_{02} - \varphi_{01}$, o vector OP' tem módulo constante A, e gira também em torno de O com a mesma velocidade angular ω. Portanto o vector girante OP' gera um movimento harmónico simples de frequência angular ω e podemos escrever, então, para x = OP,

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{A amplitude } A\text{, é:} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} \qquad (7.26)$$

A fase inicial φ_0 pode ser determinada se projectarmos os três vectores sobre os eixos OX_1 e OY_1, que giram com velocidade angular ω e constituem um sistema de referência em que os vectores OP'_1, OP'_2 e OP' estão em repouso. Então, pela lei da adição vectorial, temos;

$$A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \quad \text{e} \qquad A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \qquad (7.27)$$

Dividindo membro a membro, obtemos:

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \qquad (7.28)$$

Consideremos alguns *casos especiais importantes*

Se $\varphi_{02} = \varphi_{01}$, então, $\delta = 0$ e dizemos que os dois movimentos estão ***em fase***. Seus vectores girantes são paralelos e temos;

$$A = A_1 + A_2 \qquad \qquad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \qquad (7.29)$$

Logo, os dois movimentos harmónicos simples interferem *construtivamente* porque as suas amplitudes se somam, como podemos ver na figura 7.8.

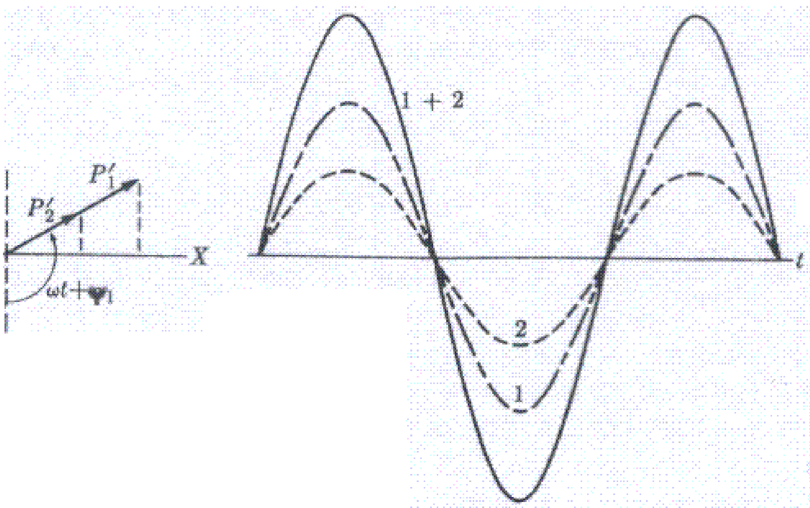


Figura 7.8 - Composição de dois MHS em **fase**.

Se $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \pi$, então, $\delta = \pi$, e dizemos que os dois movimentos harmónicos simples estão ***em oposição de fase***. Seus vectores girantes são antiparalelos e se $A_1 > A_2$,

$$A = A_1 - A_2 \qquad\qquad \varphi = \varphi_1 \tag{7.30}$$

e os dois movimentos harmónicos simples interferem destrutivamente, pois as suas amplitudes se subtraem, como ilustrado na figura 7.9. Em particular, se $A_1 = A_2$, os dois movimentos harmónicos simples cancelam-se de maneira completa.
(O que aconteceria se $A_1 < A_2$?)

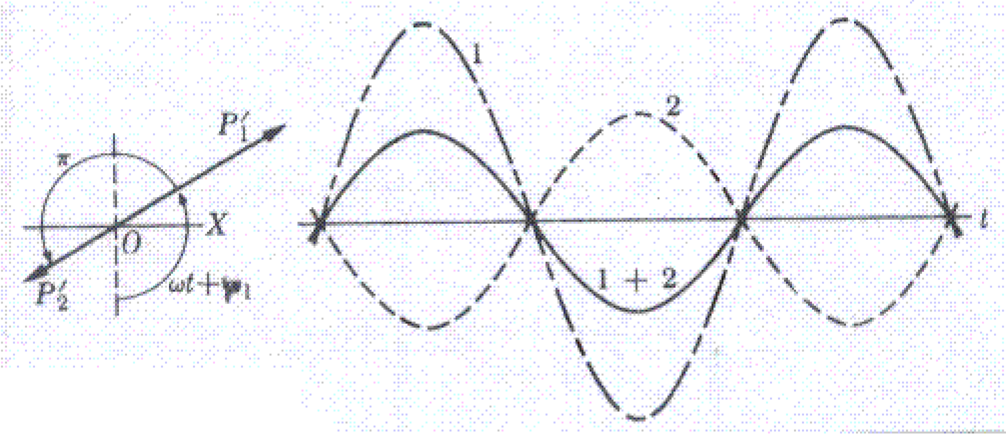


Figura 7.9 - Composição de dois MHS em **oposição de fase**.

Se $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \pi/2$, então, $\delta = \pi/2$, e dizemos que os dois movimentos harmónicos simples estão ***em quadratura***. Então;

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \tag{7.31}$$

e a fase inicial virá dada por:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + arctg\,\frac{A_2}{A_1} \tag{7.32}$$

Nesse caso, os dois vectores girantes são perpendiculares. Na figura 7.10, está ilustrado o caso em que $A_1 = A_2\sqrt{3}$ de modo que $\varphi_0 = \varphi_{01} + \pi/6$ e $A = 2A_2$.

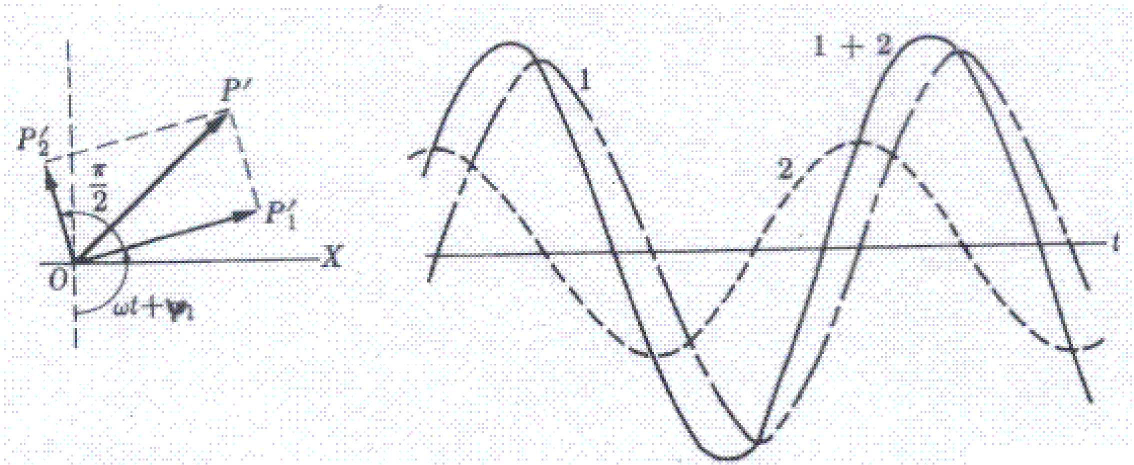


Figura 7.10 - Composição de dois MHS em quadratura de fase.

7.5.2 Sobreposição de dois MHS: mesma direcção, frequências diferentes

O caso em que dois movimentos harmónicos simples, que interferem, têm a mesma direcção e frequências diferentes é também importante. Consideremos, para simplificar, o caso em que $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = 0$; os movimentos são, então, descritos pelas equações;

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1\, t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2\, t) \tag{7.33}$$

O ângulo entre os vectores girantes OP'$_2$ e OP'$_1$ é $\omega_1\, t - \omega_2\, t = (\omega_1 - \omega_2)t$ e não é constante. Portanto o vector resultante OP' não tem módulo constante e não gira com uma velocidade angular constante. Consequentemente, o movimento resultante $x=x_1+x_2$, não é harmónico simples. Entretanto, como vemos pela figura 7.11, a "amplitude" do movimento é;

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \tag{7.34}$$

e "oscila" entre os valores $A = A_1 + A_2$ [quando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$] e $A = |A_1 - A_2|$ [quando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$]. Diz-se, então, que a amplitude ***é modulada***. A frequência de oscilação da amplitude é expressa por:

$$f = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2 \tag{7.35}$$

igual à diferença entre as frequências dos dois movimentos que interferem.

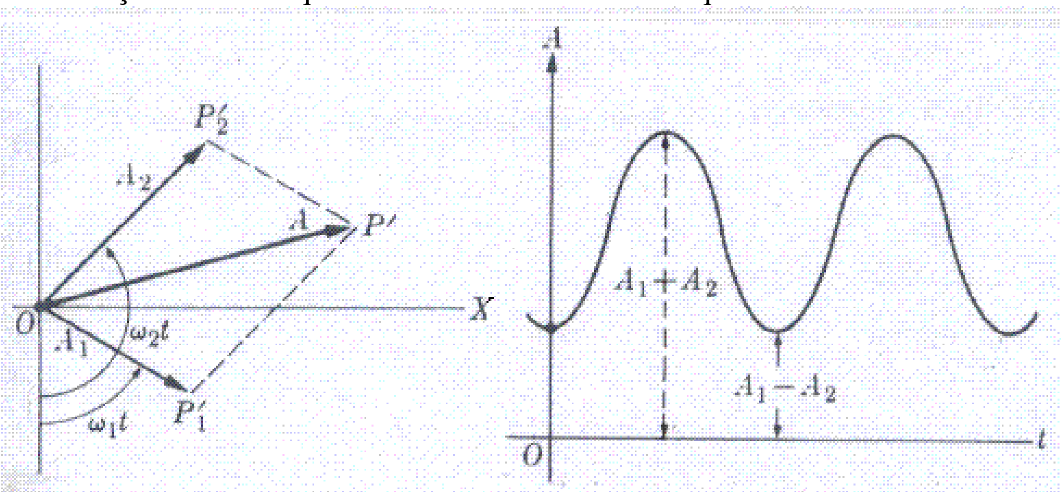


Figura 7.11 - Composição de dois MHS de frequências distintas.

A figura 7.11 mostra a variação de A com t. A situação descrita ocorre, por exemplo, quando dois diapasões de frequências próximas, mas distintas, vibram simultaneamente próximos um do outro. Observa-se uma flutuação na intensidade do som, chamada ***batimento***, que é devida à variação da amplitude.

Uma situação interessante ocorre quando $A_1 = A_2$, isto é, quando as amplitudes são iguais. Nesse caso, temos;

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A_1(\sin(\omega_1\, t) + \sin(\omega_2\, t) = \\ &= 2A_1 \cos(\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t) sen(\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t) \end{aligned} \tag{7.36}$$

indicando que o movimento é oscilatório, de frequência angular $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ e amplitude $A = 2A_1 \cos(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$. O gráfico de x em função de t é ilustrado pela figura 7.12, em que a linha a tracejado mostra a modulação da amplitude (envelope a envolver o nosso sinal).

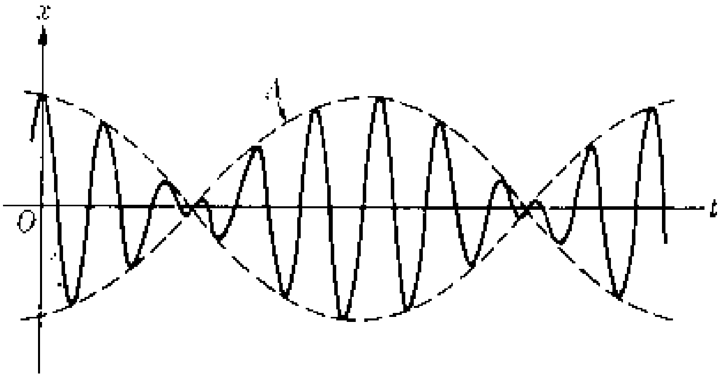


Figura 7.12 - Batimentos no caso em que as duas amplitudes são iguais.

7.5.3 Sobreposição de dois MHS: direcções ortogonais

Consideremos o caso de uma partícula sujeita a dois MHS, mas perpendiculares entre si. Podemos considerar o movimento na direcção X como $x(t) = A\sin(\omega_x\, t)$ e o movimento na direcção Y como $y(t) = B\sin(\omega_y\, t + \delta)$. As posições sucessivas ao longo do tempo que a partícula ira ocupar, estarão confinadas ao plano XY, entre $-A$ e $+A$ em X e $-B$ e $+B$ em Y. A trajectória observada será função da razão entre as frequências angulares ω_x e ω_y e da diferença de fase δ. A forma é também condicionada pelas amplitudes A e B. As figuras resultantes, que representam as trajectórias são conhecidas como figuras de *Lissajous*, (figuras 7.13 e 7.14).

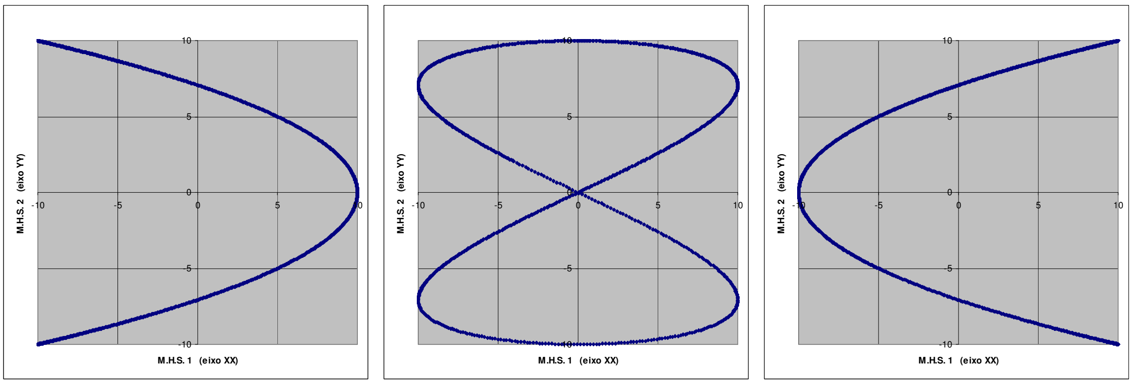


Figura 7.13 – Figuras de *Lissajous* - igual amplitude, razão de frequências $\omega_x / \omega_y = 2$ e $\delta = 0$, $\pi/2$ e π (respectivamente da esquerda para a direita).

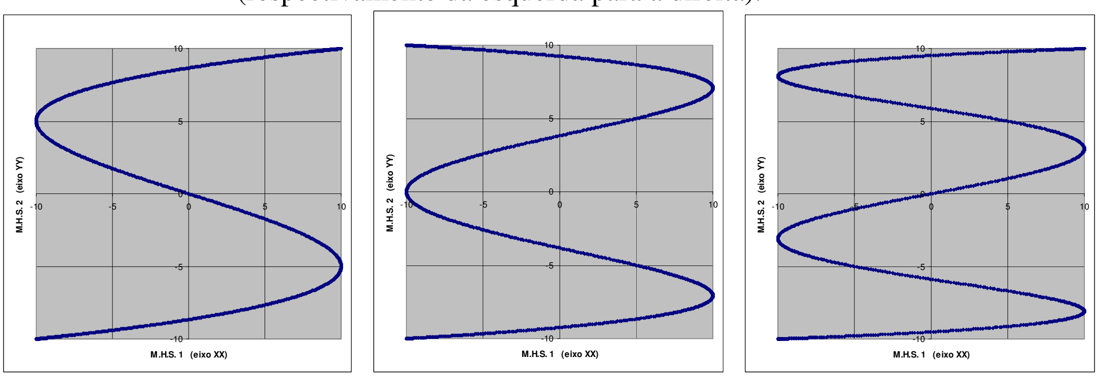


Figura 7.14 – Figuras de *Lissajous* - igual amplitude, $\delta = 0$ e razão de frequências $\omega_x / \omega_y = 3$, 4 e 5 (respectivamente da esquerda para a direita).

7.6 Oscilador harmónico amortecido. Coeficiente de amortecimento

O oscilador que estudamos até agora não sofre qualquer tipo de atrito, e mantém a sua energia total inalterável. Mas o que acontece se existir uma força de atrito aplicado no oscilador? O trabalho realizado pela força de atrito irá dissipar/fazer diminuir a energia deste e observaremos um movimento com cada vez menos energia disponível, ou seja teremos um oscilador dito amortecido. A força de atrito responsável por essa dissipação de energia pode ser devida ao atrito entre um corpo (ligado a uma mola) e o plano sobre o qual assenta ou quando se considera a força de atrito do ar com o pêndulo simples gravítico.

As forças de atrito são geralmente proporcionais à velocidade. Logo, em vez da expressão (7.14) teremos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{7.37}$$

pois a nossa força de atrito é dada por:

$$F_a = -\lambda v = -\lambda\frac{dx}{dt} \tag{7.38}$$

com λ a nossa constante de atrito.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.39}$$

onde $\gamma = \dfrac{\lambda}{m}$ e $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ γ é a constante de amortecimento do movimento.

Se não houver a força elástica de restauração, a expressão (7.39) virá:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} = 0 \tag{7.40}$$

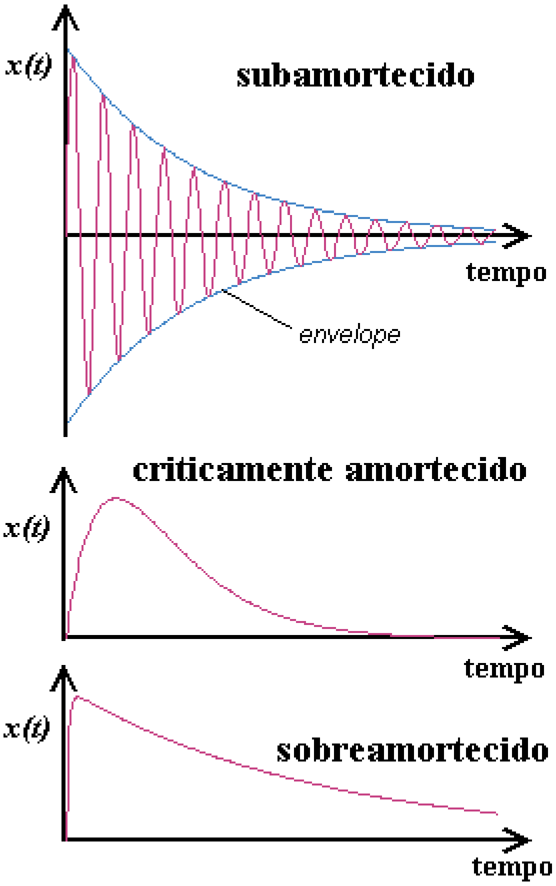
cuja solução é da forma $x(t) = C_0 e^{-\gamma t/2}$, onde C_0 é a constante que depende da posição e velocidade inicial do sistema. Ou seja, a massa em oscilação irá parar e vai faze-lo com uma taxa de desaceleração exponencial. Sem a força de atrito o movimento é oscilatório, com frequência própria (ou natural) ω_0 , como já vimos anteriormente. Então não será difícil pensar que no caso do movimento oscilatório amortecido, ele deve ter uma solução intermédia, uma "mistura" das duas soluções – uma oscilação amortecida, onde a velocidade angular deve estar um pouco modificada pela existência do atrito na oscilação.

A solução (que não vamos deduzir, mas que o aluno pode comprovar) é da seguinte forma:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t/2}\sin(\omega' t + \varphi_0) \tag{7.41}$$

onde a nova frequência angular (ω'), vem

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \tag{7.42}$$



Vamos analisar as três situações possíveis, dependendo se $\gamma^2/4$ é menor, igual, ou maior do que ω_0^2.

O caso de **subamortecido** em que $\gamma^2/4 < \omega_0^2$.
Neste caso, a oscilação repete-se durante vários ciclos e a amplitude das oscilações vai diminuindo no tempo. A amplitude decrescente da oscilação é envolvida por uma banda - chamada de *envelope*, dada por $\pm A_0 e^{-\gamma t/2}$.

O caso de **amortecimento crítico** em que $\omega_0^2 = \gamma^2/4$.
Neste caso, não temos uma oscilação completa, antes de a oscilação se completar a massa pára. Vemos isto na figura 7.15, onde a massa começa da posição de equilíbrio, alcança uma distância máxima, e volta, parando na posição de equilíbrio depois de um determinado intervalo de tempo.

O caso de **sobreamortecido** em que $\gamma^2/4 > \omega_0^2$.
Neste caso, a massa nem alcança a posição de equilíbrio num tempo finito. A distância diminui exponencialmente no tempo.

Figura 7.15 – Oscilador amortecido – as 3 soluções.

7.7 Oscilador harmónico forçado. Frequência de ressonância

Podemos também forçar um oscilador a oscilar. Por exemplo, quando aplicamos uma força periódica a uma criança num balanço de jardim, pois queremos que as oscilações continuem. A força mais fácil de se tratar matematicamente (e de aplicar) é uma força periódica na forma:

$$F = F_0 \cos(\omega t) \tag{7.43}$$

e portanto sinusoidal.

Somando todas as forças do oscilador, incluindo a força de atrito e a força aplicada, a equação torna-se então:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = (F_0/m)\cos(\omega' t) \tag{7.44}$$

Na solução, a oscilação "deverá" ter a mesma frequência que a da força aplicada.

A solução da expressão anterior (7.44) é a seguinte:

$$x(t) = x_m \cos(\omega' t + \varphi_0) \tag{7.45}$$

com:

$$x_m = \frac{F_0/m}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega'^2\right)^2 + \gamma^2 \omega_0^2\right]^{1/2}} \tag{7.46}$$

e

$$\varphi_0 = arctg\left[\frac{\gamma\omega_0}{\left(\omega_0^2 - \omega'^2\right)}\right] \tag{7.47}$$

Vemos portanto, que as amplitudes da oscilação (x_m), exibem um valor máximo quando $\omega_0^2 - \omega'^2 = 0$, ou seja quando $\omega_0 = \omega'$, $x_m\ (máx) = \dfrac{F_0}{m\gamma\omega_0}$ Esta frequência é conhecida como **frequência de ressonância** (frequência própria ou natural), figura 7.16.

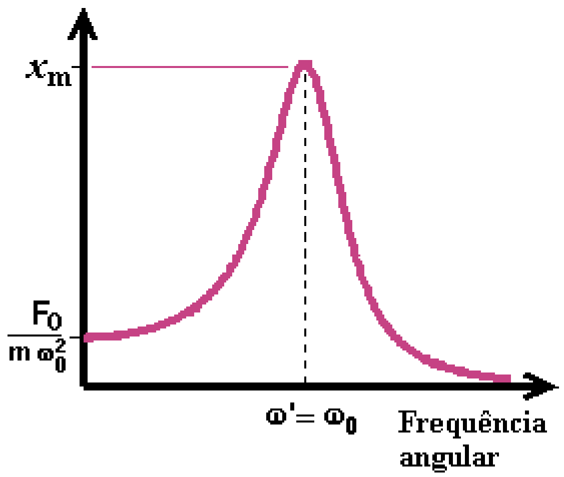


Figura 7.16 – Oscilador forçado com atrito – frequência de ressonância.

Quando a frequência da força aplicada é igual à frequência natural do oscilador, a amplitude da oscilação é máxima. Isto é um fenómeno bem nosso conhecido. Por exemplo, no caso da criança no balanço de jardim sabemos que a oscilação será máxima se aplicarmos uma força em ressonância com a frequência de oscilação natural do balanço. As ressonâncias são também responsáveis por vibrações indesejáveis em sistemas mecânicos, ruptura de estruturas como prédios e pontes sob a acção de ventos ou ondas sísmicas, etc. Todas as vezes que um oscilador está sujeito a uma força periódica com a mesma frequência que sua frequência natural, observaremos o fenómeno de ressonância. Dizemos que a força está em fase com a oscilação.