

Capítulo 6 – Corpo Rígido, Estática e Elasticidade

6.1 Noção de Corpo Rígido

Estudamos já os movimentos de corpos cujas dimensões eram desprezáveis face às medidas das suas trajetórias ou por conveniência e simplificação, tomados como pontos. A tais corpos atribuímos a designação de **partículas**.

Estudaremos de seguida o movimento de **corpos** cujas dimensões já não são desprezáveis. Admitiremos no entanto e ainda a simplificação de esses corpos serem **rígidos**, **indeformáveis**, isto é, tais que *a distância entre dois quaisquer dos seus pontos não varia no decurso do tempo*. Trata-se, em rigor, de *corpos ideais*, aos quais, porém, muitos corpos autênticos se assemelham no seu comportamento: são aqueles cuja rigidez é suficientemente grande para serem desprezáveis os movimentos relativos das suas partículas constituintes, tais como, por exemplo, moléculas poliatómicas, barras de aço, planetas, etc...

Os movimentos dos corpos rígidos podem ser **simples** (translação pura e rotação pura) ou **compostos** (translação e rotação simultâneas). O movimento mais simples de um corpo rígido é o movimento de translação ou translação pura, que tem a seguinte característica: *durante o movimento, qualquer segmento, AB, BC ou outro, definido por dois pontos do corpo, não muda de direcção*, (figura 6.1).

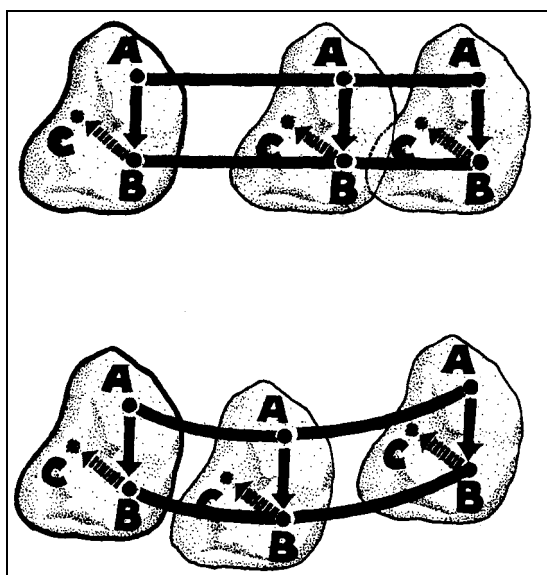


Figura 6.1 - Translação de um Corpo Rígido; rectilínea e curvilínea.

6.2 Momento de uma Força em relação a um ponto

- Efeito rotativo de uma força aplicada a um sólido (corpo rígido)

Consideremos um ponteiro que pode rodar livremente em torno de um ponto extremo O , fixo.

Seja $\vec{F}$ a força que actua no ponteiro e cujas características, relativamente ao ponteiro, se mantêm (intensidade, ângulo com o ponteiro, ponto de aplicação) no tempo, (figura 6.2).

A experiência mostra que o *efeito rotativo*, *giratório* ou de *torção* que a força $\vec{F}$ imprime no ponteiro, depende:

- 1º - da intensidade F da força,
- 2º - da distância b , do ponto O à linha de acção da força $\vec{F}$, chamada *braço de alavanca* ou apenas *braço* da força $\vec{F}$,
- 3º - do ângulo que a força $\vec{F}$ faz com o *braço de alavanca*.

Se a distância b for nula, isto é, se a linha de acção de $\vec{F}$ passar por O , a força não produz qualquer efeito rotativo no ponteiro, somente um efeito de translação.

A análise das propriedades atrás descritas, leva-nos a introduzir a seguinte *grandeza*:

Momento da força $\vec{F}$ em relação ao ponto O

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

(a unidade S.I. de momento de uma força é o metro $\times$ newton (m.N))

cujo *módulo*, mede o *efeito rotativo*, *giratório* ou de *torção* da força $\vec{F}$, e cuja *directão* é a do eixo em torno do qual roda o ponteiro.

Características:

Linha de acção: perpendicular ao plano de $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (é o *eixo imaginário* em torno do qual ocorre a rotação).

Sentido: obtido por qualquer das regras do produto externo (vectorial), em particular pela regra do triedro da mão direita.

Módulo: mede o efeito rotativo da força e é dado por, $M_0 = r.F.\sin \alpha = F.b$, ou seja o produto da medida da força pelo braço.

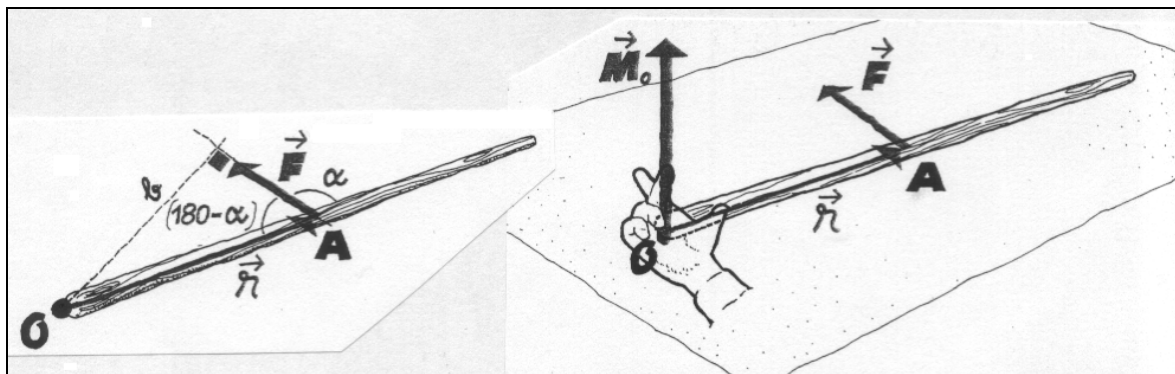


Figura 6.2 - Momento da força $\vec{F}$ em relação ao ponto O , (aplicação da regra da mão direita).

6.2.1 Momento de um Sistema de Forças em relação a um ponto

Consideremos um sistema de duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, não coplanares. Em relação a um ponto qualquer A (que, no presente caso, com a força $\vec{F}_1$, define o plano π), (figura 6.3), o momento de cada uma das forças é, respectivamente, $\vec{M}_1$ e $\vec{M}_2$.

Chama-se **momento polar resultante**, em A, do *sistema de forças*, ou simplesmente **momento polar do sistema de forças**, o vector, aplicado em A, que é igual à *soma dos momentos de cada uma das forças* em A:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad (6.2)$$

Para um *sistema de n forças*, teremos:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (6.3)$$

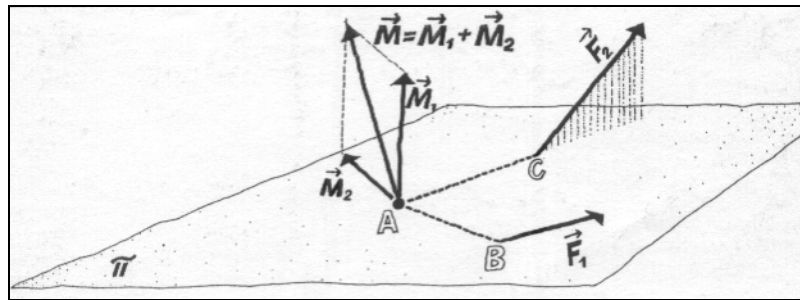


Figura 6.3 - Momento polar resultante, em A, dum sistema de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

(particular **atenção** para o facto de o *momento resultante de um sistema de forças* ser, em geral, *diferente do momento da sua força resultante*)

6.2.2 Relação entre os momentos de uma força em dois pontos diferentes

Consideremos uma força $\vec{F}$ e os seus momentos em dois pontos diferentes, O e O' (figura 6.4).

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{e} \quad \vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

A relação entre os dois momentos, advém de termos: $\vec{r}' = \vec{O'O} + \vec{r}$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{F}$$

e

$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'O} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F} \quad (6.4)$$

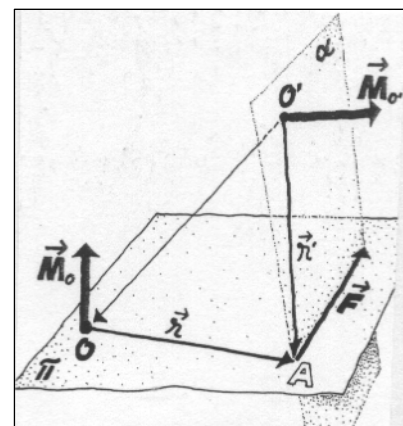


Figura 6.4 - Momento em dois pontos diferentes.

“O momento de uma força num ponto, O', é a soma do momento dessa força em outro ponto, O, com o seu momento em O' quando aplicada em O.”

6.2.3 Momento de uma Força em relação a um eixo

Quando se aplicam numa porta forças cuja linha de acção está no plano da porta - tais forças não contribuem para a abrir nem para a fechar, (figura 6.5 a). Diz-se então que estas forças *não têm efeito rotativo, giratório ou de torção*.

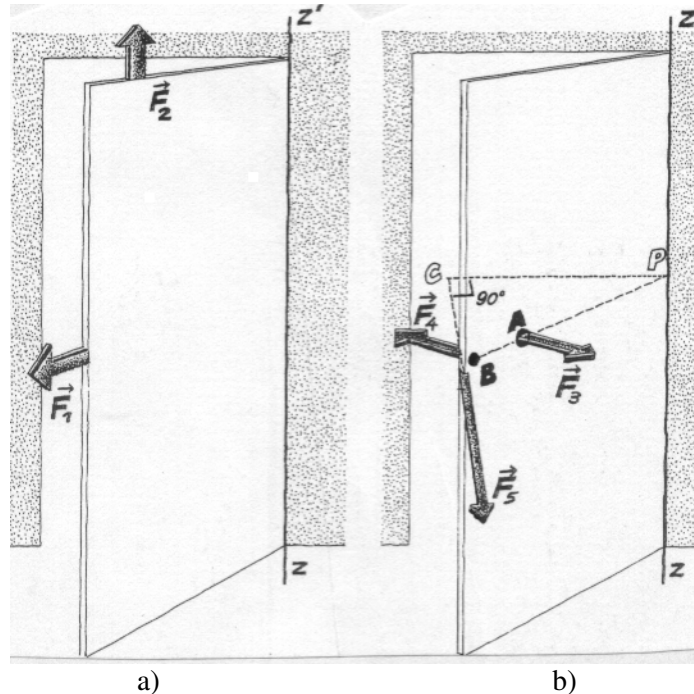
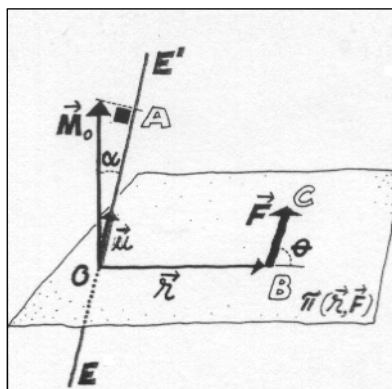


Figura 6.5 - Portas móveis (rotativas) em torno de um eixo vertical ZZ'.

Para medir o efeito de rotação de uma força em relação a um eixo, utiliza-se o chamado **momento da força em relação ao eixo**. Porém, este momento, também designado *momento axial*, não é um vector, mas sim, um escalar. Com efeito, define-se:

“Momento de uma força $\vec{F}$ em relação a um eixo (EE') é a componente escalar, segundo o eixo, do momento da força em relação a um qualquer ponto O, do eixo”

sendo: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ perpendicular ao plano $\pi(\vec{r}, \vec{F})$, e $\vec{u}$ o versor do eixo fixo (EE'), a componente escalar de $\vec{M}_0$ neste eixo é a projecção ortogonal de $\vec{M}_0$ sobre o eixo, ou seja, segundo a definição de produto interno (escalar):



$$M = \vec{M}_0 \cdot \vec{u} = |\vec{M}_0| |\vec{u}| \cos \alpha = \overline{OA} \quad (6.5)$$

Figura 6.6 - Momento de uma força em relação a um eixo fixo EE'.

6.3 Momento de um Binário

Chama-se **binário (par ou conjugado) de forças** a um sistema de duas forças de módulo igual e sentidos contrários, $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, actuando em linhas de acção paralelas. O plano π , definido pelas linhas de acção das forças, denomina-se plano do binário, e a distância $b = \overline{AC}$ (na figura 6.7 b) entre estas linhas de acção designa-se por **braço do binário**.

A soma vectorial ou resultante das duas forças (componentes do binário) é, obviamente, o vector nulo:

$$\vec{F}_r = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0} \quad (6.6)$$

O binário de forças não tem resultante. Como tal, não produz efeito de translação no corpo onde está aplicado. O binário não pode assim ser substituído por uma força única.

O **momento do binário** é o momento resultante do sistema das forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ em relação a um ponto qualquer do espaço.

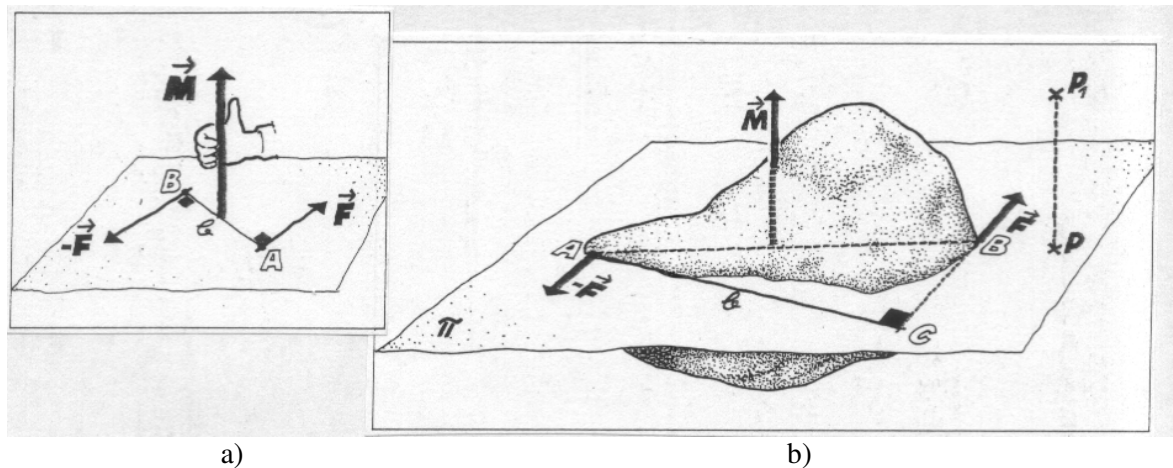


Figura 6.7 - Momento de uma binário de forças.

Para o ponto C do plano π , situado na linha de acção da força $\vec{F}$, temos:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_{C(-\vec{F})} + \vec{M}_{C(\vec{F})} = \overrightarrow{CA} \times (-\vec{F}) + \vec{0} \quad (6.7)$$

o seu módulo é:

$$|\vec{M}_C| = |\overrightarrow{CA}| |\vec{F}| \sin 90^\circ = b F \quad (6.8)$$

Para outro ponto qualquer, P por exemplo, temos:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_C + \overrightarrow{PC} \times \vec{F}_r = \vec{M}_C + \overrightarrow{PC} \times \vec{0}$$

$$\text{o que implica que } |\vec{M}_P| = |\vec{M}_C| = |\vec{F}| b$$

Sintetizando, podemos afirmar:

1º- O momento de um binário de forças é o mesmo para qualquer ponto do espaço, e designamo-lo, simplesmente, por $\vec{M}$.

2º- O momento de um binário de forças é um **vector livre**, perpendicular ao plano do binário, e de módulo $|\vec{M}| = |\vec{F}| b$.

3º- O binário de forças produz *apenas* efeito rotativo ou de torção, porque, sendo, por definição de binário; $\vec{F}_r = \vec{0}$ e $b \neq 0$, tem *resultante nula e momento não nulo*.

4º- O binário, não podendo ser substituído por uma força única, pode, no entanto, ser substituído por outro binário - o chamado **binário equivalente**.

6.4 Equilíbrio de uma partícula. Equilíbrio do corpo rígido

- Definição de equilíbrio mecânico de um corpo rígido

Diz-se que um **corpo rígido** está em **equilíbrio mecânico**, num referencial inercial, quando as *velocidades dos seus pontos constituintes* não variam em módulo, ou seja quando:

$$|\vec{v}| = \text{constante}$$

Desta definição deduzem-se, imediatamente, *três estados diferentes de equilíbrio* para um corpo rígido, a saber;

1º - O corpo está em *repouso* num referencial inercial escolhido, quer dizer, a sua velocidade é nula para qualquer ponto do corpo:

$$|\vec{v}| = 0$$

Trata-se do chamado **equilíbrio estático**.

2º - O corpo está em *movimento de translação rectilíneo uniforme*, num referencial inercial que se escolheu. Isto significa que a velocidade de qualquer ponto do corpo é constante e igual para todos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}$$

É o chamado **equilíbrio dinâmico de translação**.

3º - O corpo tem *movimento de rotação uniforme* em torno de um eixo fixo, num referencial inercial. Nestas condições, todos os pontos do corpo têm a mesma velocidade angular, que, por sua vez é constante:

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constante}}$$

Por isso, é também constante o módulo da velocidade linear de cada ponto, embora este módulo difira de ponto para ponto. Com efeito, sendo,

$$v_i = r_i \omega \quad (6.9)$$

com r_i o raio da circunferência, centrada no eixo, descrita por cada ponto, é portanto, constante o produto $r_i \omega$ para cada ponto, mas é diferente de ponto para ponto.

A este equilíbrio dá-se o nome de **equilíbrio dinâmico de rotação**.

- *Equilíbrio de uma partícula*

Para que uma partícula esteja em equilíbrio será necessário que se verifique qualquer das condições;

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= 0 \quad (\text{equilíbrio estático}), \\ \vec{v} &= \text{constante} \quad (m.r.u. \text{ ou } \text{equilíbrio dinâmico de translação}), \end{aligned}$$

às quais corresponde aceleração nula $\vec{a} = \vec{0}$, que por sua vez, implica, $\vec{F}_r = m\vec{0} = \vec{0}$

ou seja, a **condição de equilíbrio da partícula** é que seja *nula a resultante de todas as forças* que sobre ela actuam:

$$\vec{F}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0} \quad (6.10)$$

- *Condições gerais de equilíbrio do corpo rígido*

O equilíbrio do corpo rígido num dado referencial, resume-se, portanto à **anulação** da sua aceleração $\vec{a}$, na translação, e da sua aceleração angular $\vec{\gamma}$, na rotação:

$$\vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{\gamma} = \vec{0}$$

são *condições necessárias e suficientes* para que um *corpo rígido esteja em equilíbrio*.

Com efeito, a condição $\vec{F}_r = \vec{0}$ garante o *equilíbrio estático* e o *equilíbrio dinâmico de translação*, já que o sistema de forças não implica qualquer efeito de translação. É por isso que a condição $\vec{F}_r = \vec{0}$ se chama **condição da resultante** ou do **equilíbrio de translação**.

Por outro lado, a condição $\vec{M}_0 = \vec{0}$ garante o *equilíbrio de rotação*, já que, sendo nulo o momento, o sistema de forças não implica qualquer efeito rotativo. Esta condição $\vec{M}_0 = \vec{0}$ chama-se, por isso, **condição do momento** ou do **equilíbrio de rotação**.

6.4.1 Arbitrariedade na escolha do ponto em relação ao qual se calculam os momentos

Sendo as condições de equilíbrio dadas por $\vec{F}_r = \vec{0}$ e $\vec{M}_0 = \vec{0}$ (em relação a um ponto O), a escolha desse mesmo ponto O é arbitrária, isto é, para qualquer ponto - o momento resultante de todas as forças aplicadas continua a ser nulo.

$$\text{Momento em relação ao ponto } O: \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (6.11)$$

Momento em relação ao ponto O' :
$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (6.12)$$

A relação entre os dois momentos;

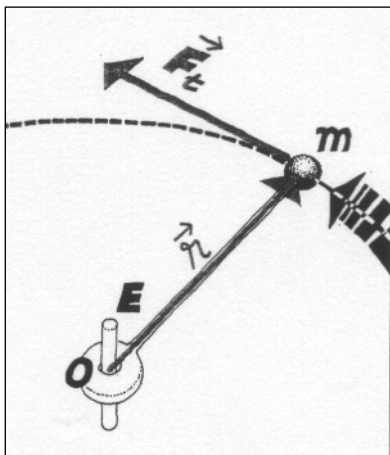
$$\vec{r}_i' = \vec{O'O} + \vec{r}_i \quad \text{e} \quad \vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{O'O} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i$$

vindo,

$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'O} \times \vec{F}_r + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_0 + \vec{O'O} \times \vec{F}_r = \vec{M}_0$$

6.5 Momento Angular de um Corpo Rígido

Começemos por analisar o *movimento de rotação* de uma partícula de massa m , obrigada a girar numa trajetória circular, devido a uma força cuja *componente tangencial*, $\vec{F}_t$, se mantém constante em módulo, (figura 6.8).



O momento é então: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}_t$

e tem por módulo $M_0 = r m a_t$

como a $a_t = \gamma r$ (da derivação de $v = \omega r$, γ é a aceleração angular)

$$\text{vem que : } M_0 = (m r^2) \gamma = I \gamma \quad (6.13)$$

Figura 6.8 – Momento da força tangencial.

$I (= m r^2)$ chama-se **momento de inércia**, da massa pontual m , em relação ao ponto O , e mede-se em kg.m^2 .

A relação entre o *momento da força*, o *momento de inércia* da massa pontual girante e a sua *aceleração angular*, na forma vectorial é:

$$\boxed{\vec{M}_0 = I \vec{\gamma}} \quad (6.14)$$

com os vectores segundo o eixo de rotação, com o mesmo sentido.

Esta expressão traduz a *lei de Newton do movimento de rotação*.

Se tivermos um *sistema de n partículas*, rigidamente ligadas entre si, o momento de inércia resultante corresponde à soma dos momentos de inércia de todas em elas, em relação a um mesmo ponto O .

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (6.15)$$

Significado físico do momento de inércia

- Na translação a **massa mede a inércia translativa**, isto é, a maior ou menor resistência oposta pelos corpos à alteração da sua velocidade linear, $\vec{v}$, por acção das forças aplicadas.
- Na rotação o **momento de inércia mede a inércia de rotação**, isto é, a maior ou menor resistência oposta pelos corpos à alteração da sua velocidade angular, $\vec{\omega}$, por acção dos momentos das forças aplicadas.

No caso de corpos rígidos constituídos por sistemas contínuos de partículas, em que o número destas é considerado infinito, temos que:

$$I = \iiint_V r^2 dm \quad (6.16)$$

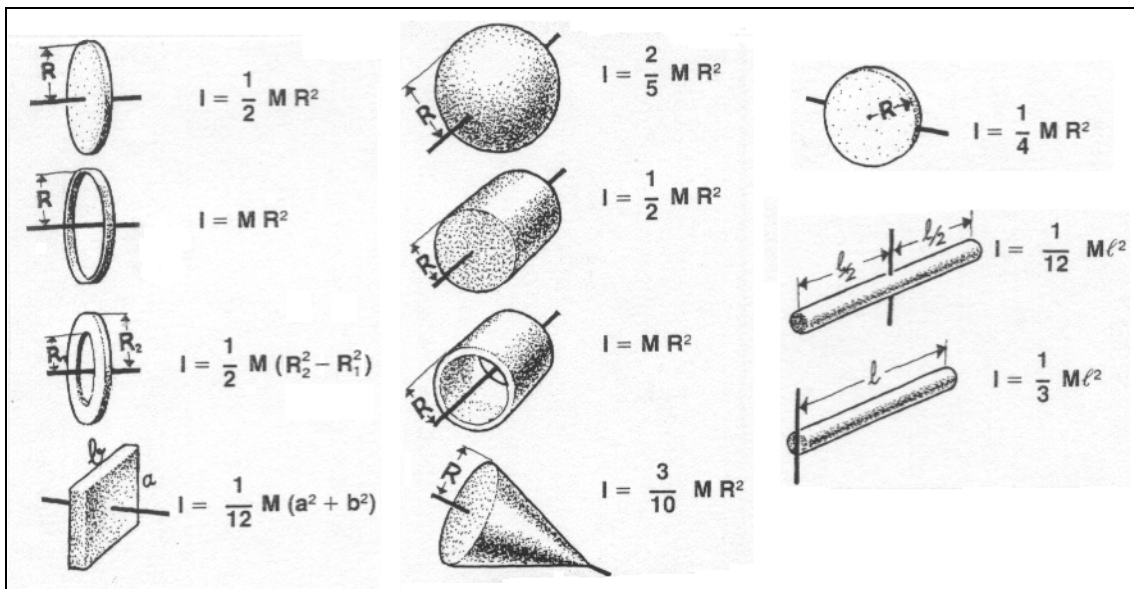


Figura 6.9 - Momentos de inércia de vários corpos de formas regulares, em relação a vários eixos.

Os momentos de inércia relativos a eixos paralelos são relacionados por uma fórmula muito simples. Tomemos Z como um eixo arbitrário e Z_C um seu eixo paralelo passando pelo centro de massa do corpo. Se a for a distância de separação entre os dois eixos, a seguinte relação, conhecida como **teorema de Steiner**, é válida;

$$I = I_C + Ma^2 \quad (6.17)$$

onde:

I e I_C são os momentos de inércia do corpo relativamente a Z e Z_C sendo M a sua massa.

(verifique a aplicação do teorema para o caso da barra da figura 6.9)

Podemos igualmente definir o *raio de giração* de um corpo, R , pela relação;

$$I = MR^2 \quad \text{ou} \quad R = \sqrt{I/M} \quad (6.18)$$

R representa a distância ao eixo em que toda a massa poderia ser concentrada sem variar o momento de inércia. É uma quantidade útil porque pode ser determinada, para corpos homogêneos, apenas com recurso à geometria.

6.5.1 Momento Angular de uma partícula

Consideremos uma partícula de massa m , que se move com velocidade $\vec{v}$. A sua *quantidade de movimento*, é:

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (6.19)$$

Seja $\vec{r}$ o vector posição da partícula em relação a um ponto O . A grandeza vectorial;

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad (6.20)$$

designa-se por **momento angular** da partícula em relação a um ponto O , como já sabemos. A unidade do *momento angular* no S.I. é o $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$.

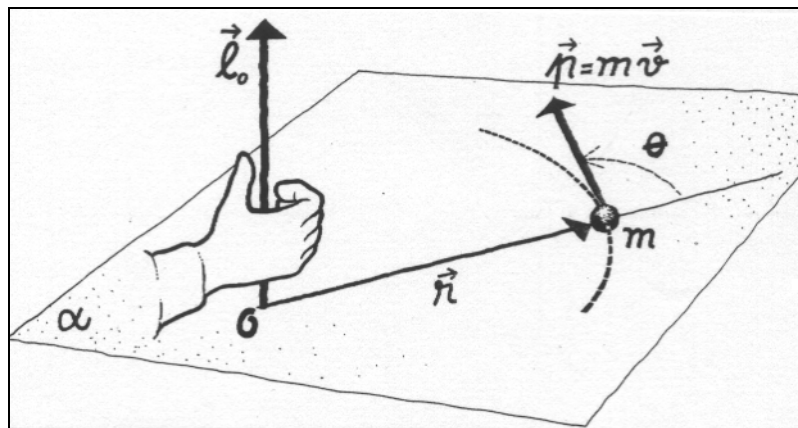


Figura 6.10 - Momento angular de uma partícula.

6.5.2 Momento Angular de um sistema de partículas

No caso de termos um sistema discreto de n partículas, de massas $m_1, m_2, \dots, m_n$ e quantidades de movimento, respectivamente $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, o **momento angular do sistema**, em relação ao ponto O , é a **soma dos momentos angulares** de cada uma das partículas:

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{l}_{0,i} \quad (6.21)$$

No caso particular e importante de um sólido ter movimento de rotação em torno de um eixo fixo de simetria, o seu momento angular em relação ao eixo é dado pelo produto do momento de inércia pela velocidade angular:

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (6.22)$$

6.5.3 Lei de variação do Momento Angular

Por analogia, se a variação de momento linear mede os efeitos de translação das interações, a variação de momento angular mede os respectivos efeitos de rotação.

Como a variação da rotação depende dos momentos das forças exteriores que actuam no corpo, deve haver uma *relação entre este momento resultante e a variação do momento angular* do corpo.

Consideremos uma partícula de massa m . Num dado instante t actua uma força $\vec{F}$, possuindo então a partícula uma dada quantidade de movimento, $\vec{p} = m \vec{v}$

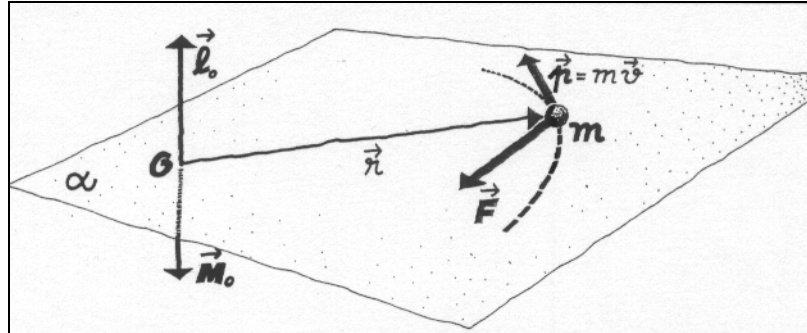


Figura 6.11 - Variação do momento angular.

Aplicando a lei fundamental de Newton, temos, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
multiplicando externamente por $\vec{r}$, à esquerda, vem:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.23)$$

o primeiro membro desta igualdade é o momento da força (em relação a um ponto O),

o segundo membro é $\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{l}_0}{dt}$, derivada do momento angular, pois;

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Assim,

$$\boxed{\vec{M}_0 = \frac{d\vec{l}_0}{dt}} \quad (6.24)$$

“o momento, relativamente a um dado ponto, da força que actua numa partícula é igual à taxa de variação temporal do momento angular da partícula em relação a esse ponto”

Se em vez de uma partícula tivermos um sistema rígido de partículas, a taxa de variação temporal do momento angular do sistema, é:

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (6.25)$$

Para o caso de estarmos na presença de um corpo rígido a rodar em torno de um eixo fixo, temos $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (expressão 6.22)

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\gamma} \quad (6.26)$$

6.5.4 Lei da conservação do Momento Angular

Quando o momento for nulo, $\vec{M}_0 = \vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{L} = \overline{\text{constante}}$ (6.27)

“quando a soma dos momentos das forças que actuam num sistema for nula, o vector momento angular do sistema permanece constante”

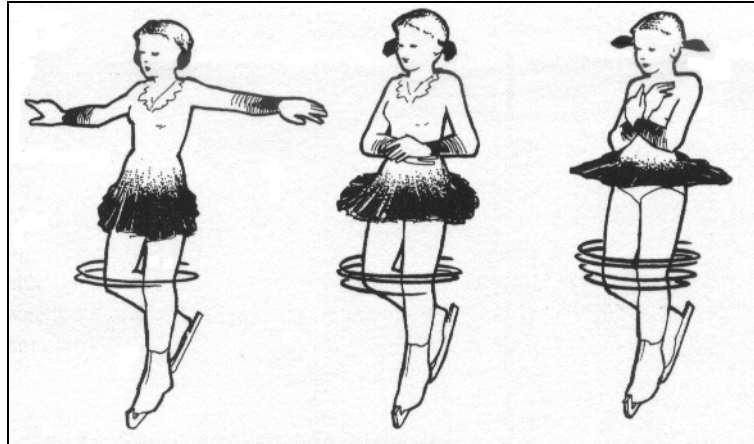


Figura 6.12 - Conservação do momento angular. Patinadora.

6.6 Centro de gravidade de um corpo

Consideremos um corpo não muito extenso formado por n partículas reais (átomos, moléculas ou iões). Este número n , pode ser muito grande, por se tratar de partículas reais. A cada partícula i corresponde determinada massa m_i e por isso uma força gravítica $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$, quando está situada num campo gravítico. No caso do campo gravítico terrestre, podemos pensar neste como um campo uniforme; $\vec{g} = \overline{\text{constante}}$ num local à superfície da Terra, não muito extenso. Por maioria de razão, o campo gravítico será uniforme no espaço ocupado pelo corpo considerado. Em tais condições, as forças gravíticas elementares a que estão sujeitas as partículas reais, $\vec{F}_1 = m_1 \vec{g}$, $\vec{F}_2 = m_2 \vec{g}$, ..., $\vec{F}_n = m_n \vec{g}$ são forças paralelas.

A resultante dessas forças paralelas, que actuam sobre as partículas elementares, é a *força gravítica* $\vec{F}_g$ aplicada no corpo. A linha de acção desta tem a direcção vertical (aproximadamente para o centro da Terra) e passa pelo centro, G , de forças paralelas. A esse centro dá-se o nome de **centro de gravidade**, naturalmente por ser um centro de forças gravíticas paralelas.

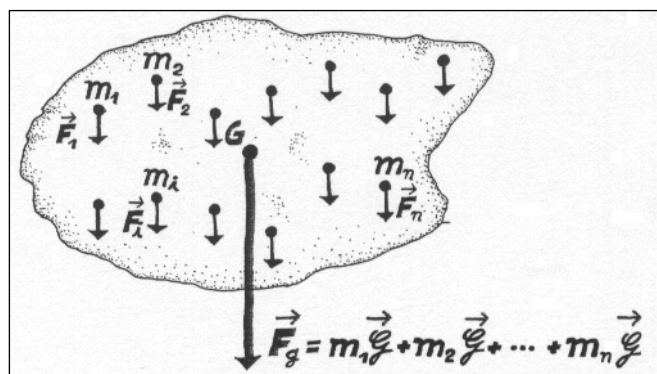


Figura 6.13 - Centro de gravidade de um corpo.

O vector posição do centro de gravidade é dado por:

$$\vec{r}_G = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + \dots + F_n \vec{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} \quad (6.28)$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 g \vec{r}_1 + m_2 g \vec{r}_2 + \dots + m_n g \vec{r}_n}{m_1 g + m_2 g + \dots + m_n g} \quad (6.29)$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} \quad (6.30)$$

(M a massa total do corpo)

No caso de um *sólido* ser *homogéneo* e ter *forma geométrica regular*, há uma distribuição simétrica de forças gravíticas parcelares a actuarem no sólido de tal modo que o *centro de gravidade* é o *centro de figura*. No caso de uma esfera, por exemplo, é o centro da esfera. No caso de uma chapa rectangular é a intersecção das suas diagonais.

No caso de um *sólido* não ser *homogéneo* e (ou) ter *forma irregular*, podemos utilizar a seguinte regra prática (figura 6.14):

1º - suspender o sólido por um dos seus pontos, S_1 , e traçar a vertical correspondente; S_1G .

2º - de seguida suspender por outro ponto, S_2 , e traçar também a vertical correspondente; S_2G .

O centro de gravidade tem de pertencer simultaneamente às duas verticais, pelo que o ponto G é o ponto que pertence e resulta da intersecção dessas duas linhas.

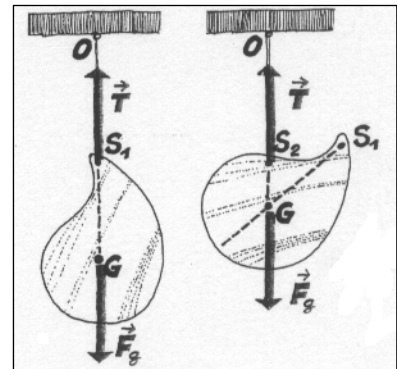


Figura 6.14 - Determinação prática do centro de gravidade.

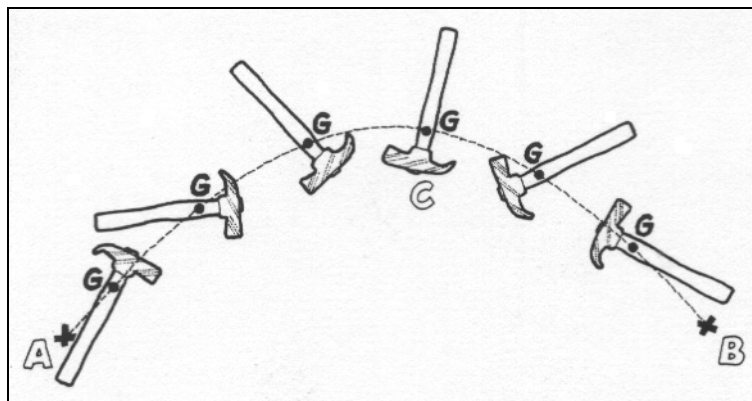


Figura 6.15 - Movimento parabólico do centro de gravidade/massa de um corpo, num campo gravítico uniforme.

Se tivermos um corpo rígido girando em torno de um eixo, em geral o momento angular $\vec{L}$ não é paralelo ao eixo de rotação.

Haverá no entanto algum eixo de rotação, para o qual o momento angular total é paralelo ao eixo ?

Para qualquer corpo rígido, independentemente da sua forma há sempre (pelo menos) três direcções mutuamente perpendiculares para as quais o momento angular é paralelo ao eixo de rotação. São os chamados **eixos principais de inércia**, e os momentos de inércia correspondentes são chamados **momentos principais de inércia**.

6.7 Equação do movimento para a rotação de um corpo rígido

Já vimos a relação entre o momento da força aplicada e a variação do momento angular de um corpo rígido. Consideremos agora um corpo rígido que gira em redor de um eixo principal, com um ponto fixo num sistema inercial. Do momento da força em relação a este ponto fixo no eixo principal, vem:

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\gamma} \quad (6.31)$$

com o eixo a permanecer fixo, relativamente ao corpo rígido e o momento de inércia também constante.

$$\boxed{\vec{M}_0 = I\vec{\gamma}}$$

Esta equação (que já tínhamos visto), tem uma grande semelhança com a do movimento de translação de um corpo (lei fundamental da dinâmica). A massa m é substituída pelo momento de inércia I , a velocidade $\vec{v}$ pela velocidade angular $\vec{\omega}$, a aceleração $\vec{a}$ pela aceleração angular $\vec{\gamma}$, e a força $\vec{F}$ pelo momento da força $\vec{M}$.

“um corpo rígido que gire em torno de um eixo principal, move-se com velocidade angular constante, quando sobre ele não existe nenhum momento externo”

que podemos considerar como a lei de inércia para o movimento rotacional.

Quando o eixo de rotação não tem um ponto fixo num referencial inercial, devemos calcular os momentos angulares e os momentos das forças exteriores relativamente ao centro de massa do corpo;

$$\vec{M}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} \quad (6.32)$$

Exemplo: Um disco com 0,5 m de raio e 20 kg de massa gira livremente em torno de um eixo horizontal passando pelo seu centro (figura 6.16). Aplica-se uma força de 9,8 N puxando-se um fio enrolado no seu bordo. Qual a aceleração angular e a sua velocidade após 2 s?

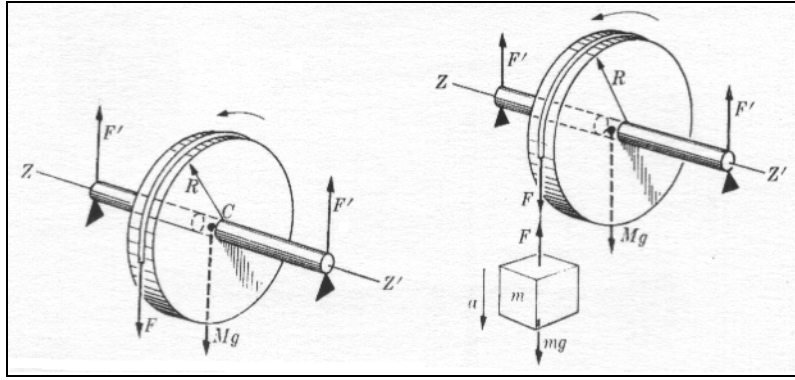


Figura 6.16 - Disco com $R=0,5\text{ m}$ e 20 kg de massa, girando livremente em torno do seu eixo horizontal.

Só temos de considerar o momento da força aplicada no fio, em módulo $M_C = R F$.

Como $I_C = \frac{1}{2} MR^2$ (figura 6.9), vem que:

$$RF = \frac{1}{2} MR^2 \gamma$$

a aceleração γ será então:

$$\gamma = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \times 9,8}{20 \times 0,5} = 1,96 \text{ rad s}^{-2}$$

a velocidade angular após 2s, se o disco partiu do repouso, será;

$$\omega = \gamma t = 1,96 \times 2 = 3,92 \text{ rad s}^{-1}$$

6.8 Energia cinética de rotação

A energia cinética de translação de um sistema de partículas foi definida como;

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.33)$$

No caso de um corpo rígido que gira em torno de um eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$, a velocidade de cada partícula é $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ (em módulo $v = \omega r$), onde r_i é a distância da partícula i ao eixo de rotação. Então, em relação ao eixo;

$$E_{CR} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \quad (6.34)$$

mas, da definição de momento de inércia, temos;

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (6.35)$$

A expressão é correcta para qualquer eixo, mesmo que não seja um eixo principal, porque o módulo da velocidade é sempre $v_i = \omega r_i$.

Consideremos agora o caso geral de um corpo rígido que gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, tendo ao mesmo tempo um movimento de translação em relação ao observador. A sua energia cinética será:

$$E_C = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (6.36)$$

com v_{CM} a velocidade (de translação) do seu centro de massa, e I_C o seu momento de inércia relativo ao eixo de rotação.

6.8.1 Rolamento de uma esfera, um cilindro e um anel sobre um plano inclinado

Vamos considerar três corpos rígidos; uma esfera, um cilindro e um anel, todos de igual raio R . Consideremos o rolamento destes corpos por um plano inclinado, sem escorregamento, como ilustrado na figura 6.17. Estão indicadas as forças que agem sobre o corpo, tal como as velocidades (angular e do centro de massa).

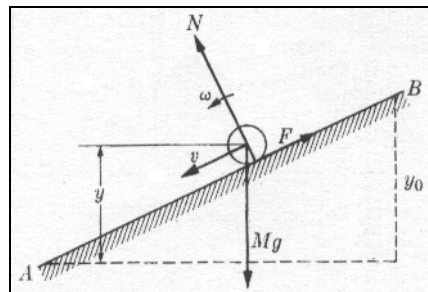


Figura 6.17 - Rolamento de um corpo rígido ao longo de um plano inclinado.

A velocidade do corpo, partindo este do repouso, pode ser aproximada (mas não é válida, porquê ?) por aplicação do princípio de conservação da energia.

Em qualquer ponto ao longo do plano inclinado, a sua energia é:

$$E = Mgy_0 = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + Mgy = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} (I_C / R^2) v^2 + Mgy \quad (6.37)$$

Para uma esfera: $I_C = \frac{2}{5} MR^2$, para um cilindro: $I_C = \frac{1}{2} MR^2$, e para um anel: $I_C = MR^2$

Para a esfera:

$$E = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{2}{5}\right) v^2 + Mgy = Mgy_0 \quad \text{e} \quad v^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + \frac{2}{5}} \quad (6.38)$$

Para o cilindro:

$$E = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{1}{2}\right) v^2 + Mgy = Mgy_0 \quad \text{e} \quad v^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + \frac{1}{2}} \quad (6.39)$$

Para o anel:

$$E = \frac{1}{2} M (1 + 1) v^2 + Mgy = Mgy_0 \quad \text{e} \quad v^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{2} \quad (6.40)$$

6.9 Propriedades Elásticas de sólidos

A simplificação que fizemos de considerar os corpos sólidos como rígidos (indeformáveis), quando sujeitos a forças exteriores, não é o que acontece na natureza. Qualquer corpo quando sujeito a forças pouco intensas tem um comportamento **elástico**. Quando a intensidade das forças aplicadas aumenta, os corpos passam a ter um comportamento **plástico**. Nos líquidos e gases, denominados de fluidos, os seus comportamentos são bastante diferentes dos sólidos, quando sujeitos a forças exteriores.

6.9.1 Elasticidade dos sólidos

Consideremos uma barra sólida na qual é aplicado um par de forças nas suas extremidades, perpendicularmente a estas. Definimos como tensão (ou tensão normal) σ a que fica sujeita a barra, a quantidade;

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (\text{Nm}^{-2} = \text{Pa}) \quad (6.41)$$

com F a intensidade (módulo) da força aplicada num dos extremos da barra, cuja secção tem a área S .

As tensões aplicadas na barra podem ser de compressão, quando são aplicadas no sentido em que provocam a diminuição do comprimento da mesma (figura 6.18 a), ou de distensão (ou tracção), quando aplicada nos sentidos opostos, provocando um aumento do comprimento da barra (figura 6.18 b).

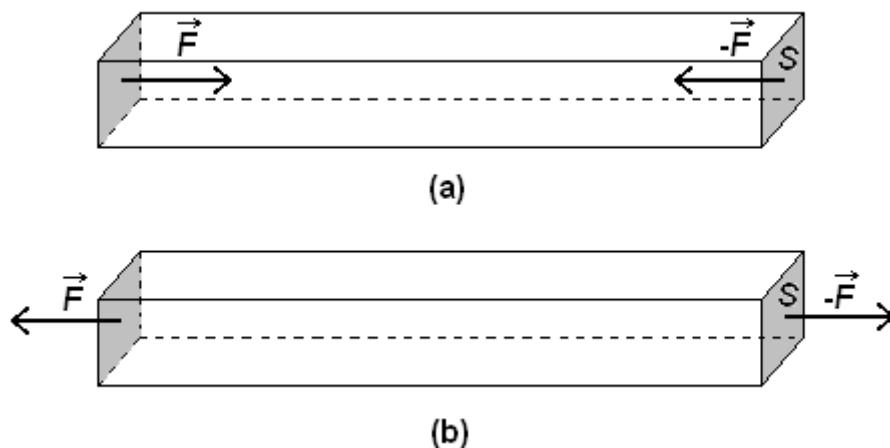


Figura 6.18 – a) Compressão e b) Distensão de uma barra, quando aplicadas forças normais nas suas extremidades.

Aplicando uma tensão a um corpo, provocamos nele uma deformação ε , definida como;

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{grandeza adimensional}) \quad (6.42)$$

onde Δl é a variação de comprimento na barra, de comprimento inicial l .

Para os nossos corpos sólidos, verificamos experimentalmente que a *deformação* provocada está directamente relacionada com a *tensão* que a causou. Essa relação causa-efeito, pode ser expressa num gráfico onde é representada a curva de *tensão-deformação* correspondente ao material sólido em análise (figura 6.19). Para pequenas tensões, esta relação é aproximadamente linear. Nesta fase diz-se que o material tem um **comportamento elástico** (segue a lei de Hooke, capítulo 5, página 68, expressão (5.33)).

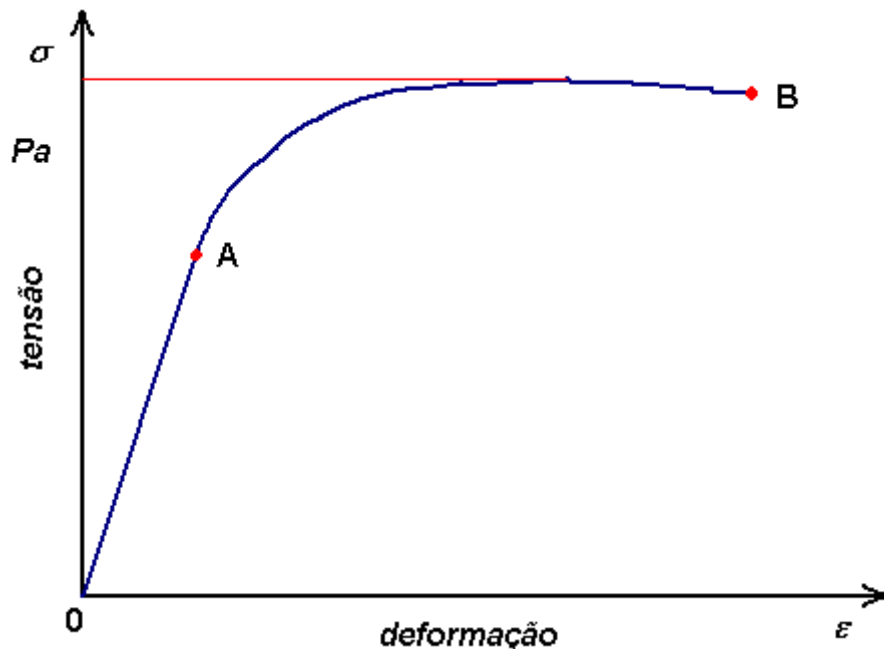


Figura 6.19 – Curva de *tensão-deformação* de um corpo.

Ao declive do segmento $\overline{OA}$ do gráfico da curva de *tensão-deformação* chamamos **módulo de Young**, e é definido por;

$$Y = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (\text{Pa}) \quad (6.43)$$

Para a maior parte dos nossos materiais, este valor é conhecido e está tabelado. Por exemplo, os módulos de Young para o aço e a borracha são, $2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ e 10^9 Nm^{-2} , respectivamente.

A região não linear da curva AB de *tensão-deformação* corresponde a um **comportamento plástico**, com o limite indicado na curva a marcar a tensão de fractura do mesmo.

Quando se aplicam tensões que provocam uma deformação elástica, as forças elásticas internas (forças restauradoras) nos corpos levam esses mesmos corpos ao seu estado inicial, quando as tensões deixam de ser exercidas. Se as tensões aplicadas excederem o valor representado no gráfico pelo ponto A da figura 6.19, então quando se der a suspensão dessas mesmas tensões, o corpo já não regressa á sua condição (forma) inicial, e fica para sempre deformado.

Quando as forças aplicadas nas secções S da barra não são normais a esta, mas tangenciais, elas provocam uma *deformação longitudinal* (figura 6.20). Neste caso a chamada tensão de cisalhamento σ_c , causa uma deformação angular γ definida como;

$$\gamma = \tan \theta \quad (6.44)$$

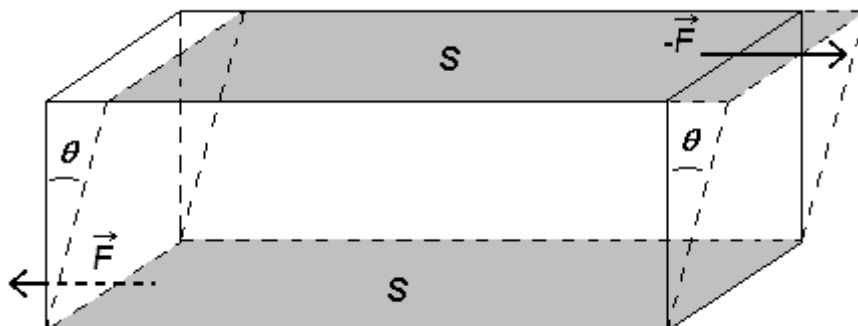


Figura 6.20 – Tensão de cisalhamento e deformação longitudinal na extremidade de uma barra.

Nestas deformações longitudinais observamos também uma zona de comportamento linear na curva de *tensão-deformação*, podendo definir-se o **módulo de elasticidade transversal** (**módulo de rigidez** ou **módulo de cisalhamento**), G , através da seguinte expressão;

$$G = \frac{\sigma_c}{\gamma} = \frac{F/S}{\gamma} \quad (\text{Pa}) \quad (6.45)$$

Quando se sujeita um sólido a uma pressão hidrostática, como ilustrado na figura 6.21, uma alteração de pressão Δp , sobre o volume V do sólido, dá origem a uma deformação volumétrica. Em condições em que a temperatura é constante, definimos o **módulo de elasticidade volumétrica isotérmica** B , através da seguinte expressão;

$$B = -V \frac{dp}{dV} \quad (\text{Pa}) \quad (6.46)$$

Por exemplo, os módulos de elasticidade volumétrica para o aço e para o Nylon são, respectivamente, $2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ e $6 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}$.

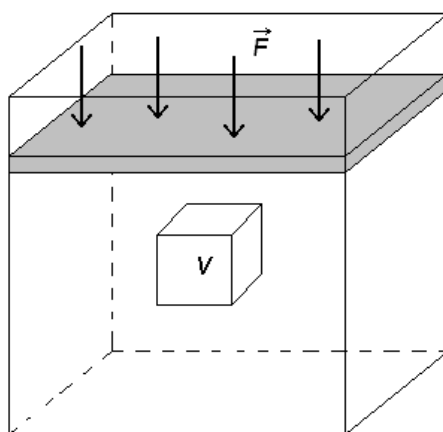


Figura 6.21 – Sólido sujeito a uma pressão hidrostática.