Capítulo 4 – Dinâmica do ponto material

Na **Cinemática** foram descritos matematicamente os movimentos das partículas (corpos materiais tomados como pontos materiais).

Na **Dinâmica** vamos estudar as razões pelas quais as partículas se movem segundo as trajectórias descritas na cinemática.

Verificamos que;

- os corpos próximos da Terra caem para esta com aceleração constante. Porquê?
- a Terra move-se em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica. Porquê?
- os átomos ligam-se para formar moléculas. Porquê?
- que uma mola oscila quando esticada ou comprimida. Porquê?

Através da observação e do entendimento dos fenómenos, podemos descobrir o comportamento básico da natureza e assim usá-lo em nosso proveito, por exemplo na engenharia, no projecto de máquinas que se movam do modo como desejamos.

O estudo da <u>relação</u> entre o movimento de um corpo e as <u>causas</u> desse movimento é chamado de Dinâmica.

A nossa experiência diária diz-nos que o movimento de um corpo é o resultado directo da sua interacção com os outros corpos que o rodeiam.
Quando um jogador lança uma bola, ele interagiu com a bola modificando o seu movimento, esse movimento é também alterado pela interacção que a bola tem com a Terra.

Todas estas interacções são convenientemente descritas por um conceito matemático chamado de força.

O estudo da Dinâmica é basicamente a análise da <u>relação</u> entre a <u>força</u> e as <u>variações do movimento</u> de um corpo.

Todas as leis do movimento que apresentamos a seguir são generalizações que decorrem da análise cuidada dos movimentos observados por nós e da extrapolação que fazemos dessas observações, ideais ou simplificadas.

4.1 Lei da Inércia

Uma partícula que não esteja sujeita à interacção é dita uma **partícula livre**.

É uma situação ideal, que não existe no Universo, pois todas as partículas interagem com todas as restantes partículas. Por consequência uma partícula livre deveria estar completamente isolada ou ser a única partícula do Universo. Tal caso não existe, pois o simples facto de observar pressupõe uma interacção entre o observador e o objecto em estudo.

A prática, no entanto, mostra-nos que podemos considerar algumas partículas como livres, quer porque, estando elas suficientemente afastadas das demais, as suas interacções são desprezíveis, quer porque as interacções mútuas são canceladas, resultando uma interacção nula.

4.1.1 Enunciado da Lei da Inércia

"uma partícula livre move-se sempre com velocidade constante, isto é, sem aceleração"

Ou seja, por análise do enunciado vemos que uma partícula livre ou se move em linha recta com velocidade constante (*m.r.u.*) ou está em repouso (tem velocidade nula).

Esta afirmação é também conhecida como a **primeira Lei de Newton**, uma vez que foi ***Sir Isaac Newton*** [1], o primeiro a enuncia-la desta forma. É a primeira de três leis enunciadas por *Newton*, no século XVII.

Lembremos que o movimento é um conceito relativo, e assim sendo devemos sempre indicar a que sistema de referência nos estamos a reportar. Admitimos que o movimento de uma partícula livre é relativo a um observador que seja ele próprio considerado uma partícula (ou sistema) livre, isto é, ele também não está sujeito a interacção com o resto do Universo. Tal observador é chamada um ***observador inercial***, sendo o seu sistema de referência dito ***referencial inercial*** (referencial não acelerado). Como tal um referencial deste tipo não pode ter movimento de rotação. (porquê?).

De acordo com a lei da inércia, podemos ter vários observadores inerciais, todos com velocidades constantes. Suas descrições de observações estão relacionadas pela transformação de Galileu na mecânica clássica (ver capítulo 3, expressão 3.73) ou pela transformação de Lorentz (mecânica relativista), dependendo da grandeza das suas velocidades relativas.

A Terra não é um referencial inércial, quer devido à sua rotação diária, quer devido à interacção com o Sol e os outros planetas. No entanto, em muitos casos, podemos considerar essas interacções e rotação desprezíveis, considerando os nossos observatórios terrestres como inerciais, sem grande erro.

O Sol também não pode ser considerado um referencial inércial. Devido à sua interacção com os restantes corpos celestes da Galáxia, ele descreve uma órbita curvilínea em torno do centro da nossa galáxia, como ilustrado na figura 4.1.

[1](*Isaac Newton*, 1642-1727), físico e matemático inglês. Formulou as leis fundamentais da mecânica e da gravitação universal, tal como o cálculo diferencial e integral.

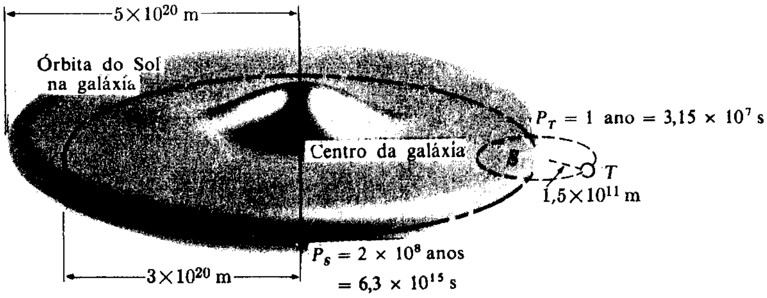


Figura 4.1 – Representação do movimento da Terra em torno do Sol, e deste em torno do centro da Galáxia.

Exemplo:

Uma bola esférica colocada sobre uma superfície horizontal e lisa permanecerá em repouso a menos que actuemos sobre ela. Ou seja, a sua velocidade permanece constante, com valor igual a zero. Admitimos que a superfície sobre a qual a bola repousa equilibra a interacção entre a bola e a Terra, e portanto a bola está essencialmente livre de interacções. Quando actuamos na bola, por exemplo numa mesa de bilhar, ela sofre momentaneamente uma interacção e adquire velocidade. Mas após essa acção, a bola pode ser considerada como livre, movendo-se em linha recta com a velocidade adquirida quando foi atingida. Se a bola é perfeitamente esférica e rígida, e a superfície perfeitamente lisa, podemos admitir que a bola continuará a mover-se indefinidamente em linha recta com velocidade constante. Na prática, tal não acontece, pois a bola perde velocidade e acaba por parar. Dizemos que ocorreu uma interacção adicional entre a bola e a superfície – interacção essa que conhecemos como ***atrito***.

4.2 Quantidade de Movimento

Podemos introduzir o conceito operacional de massa como sendo um valor numérico que atribuímos a cada corpo ou partícula, número esse atribuído por comparação com um corpo-padrão (massa padrão de 1 kg, capítulo 1, página 3). A massa passa a ser um parâmetro que distingue uma partícula de outra. A nossa definição de massa é para o corpo suposto em repouso, ou seja, ***massa em repouso***. Por esta definição não sabemos qual o comportamento da massa (será que se mantém constante?) com o movimento da partícula. Mas admitamos que a massa é independente do estado do movimento – para começar, é uma boa aproximação (desde que a velocidade seja, quando comparada com a velocidade da luz c_0, muito inferior a esta).

A ***quantidade de movimento*** (também chamada de *momento cinético*, simplesmente *momento*, ou *momentum* - do latim), de uma partícula é definido como o **produto da sua massa pela sua velocidade**.

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \tag{4.1}$$

é uma quantidade vectorial e tem a mesma direcção e sentido da velocidade.

É um conceito muito importante em Física, pois combina os dois elementos que caracterizam o estado dinâmico de uma partícula (corpo); a sua massa e a sua velocidade. No Sistema Internacional (S.I.) a quantidade de movimento é expressa em m.kg.s^{-1}.

Várias experiências mostram que este conceito de quantidade de movimento é uma grandeza dinâmica mais informativa (abrangente) do que a velocidade por si só.
Por exemplo, um camião carregado, em movimento, é mais difícil de conseguir parar (ou de ser acelerado) do que um camião vazio, mesmo que ambos tenham a mesma velocidade, pois as suas quantidades de movimento são distintas (é maior no camião carregado).

Podemos agora enunciar a ***lei de inércia*** de outra forma;

"uma partícula livre move-se sempre com quantidade de movimento constante"

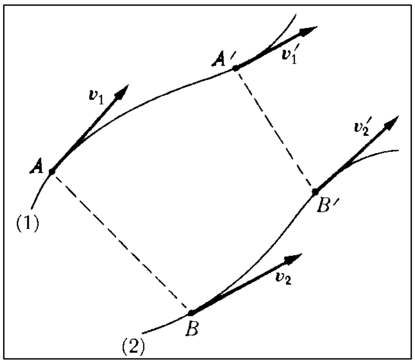
4.2.1 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

A consequência imediata deste último enunciado, diz-nos que um observador inércial reconhece que uma partícula não é livre, quando ele observa que esta não permanece com velocidade ou quantidade de movimento constantes, por outras palavras; a partícula sofre uma aceleração.

Considerando agora uma situação ideal, de apenas duas partículas sozinhas no Universo, interagindo entre si. Como resultado dessa interacção as suas velocidades individuais variam com o tempo e as suas trajectórias são em geral curvas.

Num determinado instante *t*, a partícula 1 está em *A*, com velocidade $\vec{v}_1$ (e massa m_1), a partícula 2 está em *B*, com velocidade $\vec{v}_2$ (e massa m_2). Num instante posterior *t'*, as partículas estarão em *A'* e *B'*, com velocidades respectivamente $\vec{v}_1^{\,'}$ e $\vec{v}_2^{\,'}$.

A quantidade de movimento total do sistema, no instante *t*, é:



$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad (4.2)$$

Figura 4.2 – Interacção entre duas partículas.

No instante *t'*, a quantidade de movimento total do sistema, será:

$$\vec{P}' = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'} = m_1\vec{v}_1^{\,'} + m_2\vec{v}_2^{\,'}$$

O importante, é que a observação nos instantes *t* e *t'*, quaisquer que eles sejam, mostra-nos sempre que:

$$\vec{P} = \vec{P}'$$

"a quantidade de movimento total de um sistema composto por duas partículas sujeitas somente às suas interacções mútuas permanece constante"

Por exemplo se considerássemos somente a Terra e a Lua (desprezando os efeitos do Sol e restantes planetas), a soma das suas quantidades de movimento, relativas a um referencial inércial seria constante.

Este Princípio de Conservação de Quantidade de Movimento, enunciado para duas partículas, pode ser generalizado para um qualquer número de partículas constituído num sistema isolado, isto é um sistema de partículas só com interacções mútuas.

Portanto, numa regra geral temos o seguinte enunciado:

"a quantidade de movimento total de um sistema isolado de partículas é constante"

que pode ser expressa da seguinte forma;

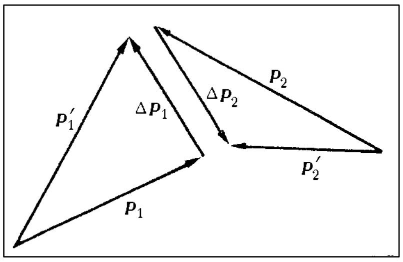
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \overrightarrow{\text{constante}} \qquad (4.3)$$

Tal é o que se verifica nas experiências. Muitas partículas atómicas e sub-atómicas foram descobertas, porque "não se verificava" a conservação da quantidade de movimento. A "não conservação" resultava da interacção *não esperada* (e desconhecida até então) de uma nova partícula (figura 4.5).

Voltando ao caso particular de um sistema constituído por apenas duas partículas;

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{\text{constante}} \qquad (4.4)$$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'}$ em dois instantes t e t' respectivamente, o que implica que;



$$\vec{p}_1^{\,'} - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2^{\,'} = -(\vec{p}_2^{\,'} - \vec{p}_2)$$

se escrevermos as variações como: $\Delta\,\vec{p} = \vec{p}^{\,'} - \vec{p}$ (4.5)

teremos; $\Delta\,\vec{p}_1 = -\Delta\,\vec{p}_2$ (4.6)

Figura 4.3 – Troca de quantidade de movimento como resultado da interacção entre duas partículas.

A conclusão tirada desta expressão - é imediata - num sistema isolado de duas partículas em interacção, a variação da quantidade de movimento de uma delas, durante um certo intervalo de tempo, é igual em módulo, e de sinal contrário, à variação da quantidade de movimento da outra partícula durante o mesmo intervalo de tempo. Podemos sintetizar este conhecimento da seguinte maneira:

"uma interacção origina sempre uma troca de quantidade de movimento"

de modo que a quantidade de movimento *"perdida"* por uma das partículas em interacção seja igual à quantidade de movimento *"ganha"* pela outra partícula.

Nesta perspectiva, a **Lei da Inércia**, é um caso muito particular do princípio da conservação da quantidade de movimento. Com uma só partícula, $\vec{p}_1 = \overrightarrow{\text{constante}}$ e $\Delta\,\vec{p}_1 = \vec{0}$, ou equivalente, $\vec{v}_1 = \overrightarrow{\text{constante}}$.

Por exemplo, no disparo de um dardo tranquilizante, a arma disparada recua para compensar a quantidade de movimento adquirida pelo projéctil no seu movimento para a frente. Inicialmente o sistema arma mais o dardo está em repouso (relativamente ao agente), ou seja a quantidade de movimento total é zero.

O mesmo acontece quando da explosão de uma projéctil. A quantidade de movimento antes da explosão é igual a soma das quantidades de movimento da totalidade dos fragmentos após a explosão.

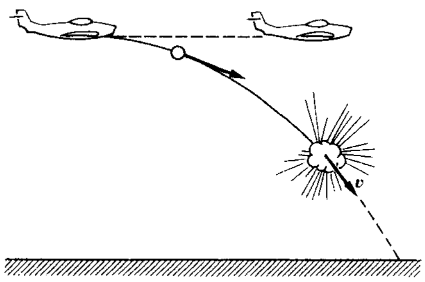


Figura 4.4 – Conservação da quantidade de movimento numa explosão.

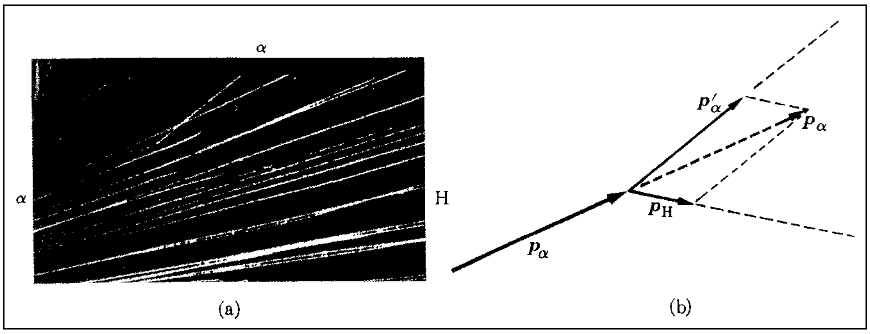


Figura 4.5 – Conservação da quantidade de movimento numa colisão entre uma partícula α e um protão. (a) fotografia do fenómeno, (b) esquema da interacção.

4.2.2 Redefinição de Massa

Podemos exprimir a variação da quantidade de movimento de uma partícula, como:

$$\Delta \vec{p} = \Delta (\mathrm{m}\vec{v}) = \mathrm{m}\, \Delta \vec{v} \tag{4.7}$$

num sistema de duas partículas,

$$\mathrm{m}_1\, \Delta \vec{v}_1 = - \mathrm{m}_2\, \Delta \vec{v}_2 \tag{4.8}$$

considerando somente os módulos,

$$\frac{\mathrm{m}_2}{\mathrm{m}_1} = \frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|} \tag{4.9}$$

a razão das massas é inversamente proporcional ao módulo das variações das velocidades. Podemos assim obter uma ***definição dinâmica de massa***. Se tomarmos a massa m_1 como a nossa "massa padrão" (unitária), para a outra partícula em interacção, podemos obter a sua massa m_2 . (tomando a hipótese da constância da massa).

4.3 A Segunda e Terceira Lei de Newton. Conceito de Força

Quer por dificuldade, quer propositadamente, é quase sempre impossível de determinar as interacções totais entre todas as partículas de um sistema muito numeroso, ou seja, conhecer as quantidades de movimento da cada partícula.

Se introduzirmos o conceito de Força, podemos resolver este "problema".

Vamos relacionar as variações das quantidades de movimento, num intervalo de tempo, $\Delta t = t' - t$

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \tag{4.10}$$

quando $\Delta t \to 0$, temos,

$$\frac{d\,\vec{p}_1}{d\,t} = -\frac{d\,\vec{p}_2}{d\,t} \tag{4.11}$$

Daremos *à variação temporal da quantidade de movimento de uma partícula* o nome de *"força"*

<u>A força actuando numa partícula, será:</u>

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}} \tag{4.12}$$

<u>- Matematicamente</u> é a definição acima explicitada.
<u>- Fisicamente</u> é a expressão da interacção entre a partícula e o restante sistema.

A expressão referida é a ***Segunda Lei de Newton*** para o movimento, (é mais uma definição do que uma lei, e é consequência directa do princípio de conservação da quantidade de movimento).

Agora podemos escrever, da expressão (4.11);

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2} \tag{4.13}$$

ou seja,

"quando duas partículas interagem, a força sobre uma partícula é igual em módulo, e de sentido contrário, à força sobre a outra partícula"

O que corresponde ao enunciado da ***Terceira Lei de Newton*** para o movimento, também conhecida como a <u>Lei de Acção-Reacção</u> (figura 4.6 a).

Podemos ainda escrever a segunda lei, como,

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \frac{d\,(m\,\vec{v})}{d\,t} = m\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = m\,\vec{a}} \tag{4.14}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad (4.15)$$

"Se a massa é constante, a força é igual ao produto da massa pela aceleração"

Propriedades da força:

- a força e a aceleração têm a mesma direcção e sentido,
- se a força for constante, a aceleração, $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ é também constante – o movimento é uniformemente acelerado.

É o que ocorre perto da superfície da Terra. Por exemplo, os corpos em queda livre exibem um movimento com aceleração constante ($\vec{g}$).
A força de atracção gravitacional da Terra sobre os corpos é chamada de **Peso**, e é:

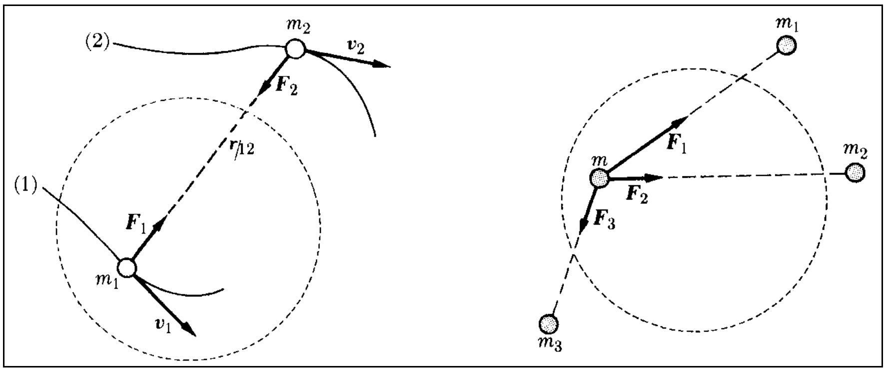
$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}} \qquad (4.16)$$

(recordemos que o nosso valor medido de $\vec{g}$ é efectivamente dado por $\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$, quando estamos em repouso ou a baixa velocidade relativamente à Terra. Expressão (3.97) do capítulo 3).

Consideremos uma partícula (m) a interagir com um número n de partículas, (m_1, m_2, m_3, ...). Devido a essa interacção, cada uma das partículas produzirá uma variação na quantidade de movimento da partícula (m), que se caracteriza pelas respectivas forças $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ...)$. A variação total da quantidade de movimento da partícula será:

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = \vec{F}_{res} \qquad (4.17)$$

A força $\vec{F}$ é chamada força resultante que actua na partícula m.



a) b)

Figura 4.6 – a) Par acção-reacção. b) Força resultante sobre uma partícula.

Não estamos a entrar em conta com as interacções mútuas entre todas as partículas, mas somente a interacção sobre a partícula m, de modo a simplificar a sua descrição. Deste modo podemos discutir o movimento da partícula m, admitindo que a força $\vec{F}$ é somente função das coordenadas da partícula, ignorando os movimentos das restantes partículas com as quais interage.

Esta aproximação é chamada ***Dinâmica de uma Partícula.***

No dia a dia "sentimos" o conceito de força, como uma interacção por contacto, por exemplo a martelar um prego. Mas essa interacção é exactamente igual à interacção que existe entre a Terra e o Sol, porquanto as distâncias envolvidas sejam muito diferentes. Na realidade os corpos ou partículas são sempre mantidos a distâncias entre eles de acordo com as suas massas e estruturas.
Se a interacção ocorre à distância, então teremos de pensar num mecanismo de transmissão dessa mesma interacção, e como as interacções se propagam com velocidade finita (possivelmente à velocidade máxima – a da luz), teremos de repensar o conceito de força e o seu papel. Na prática, e para baixas velocidades e pequenas distâncias, a nossa aproximação continua a ser excelente e suficiente para a descrição das interacções observadas.

4.3.1 Unidade da Força. Definição

É expressa em unidades de massa e de aceleração.
Unidade da força é o ***newton*** , representada por **N** (kg m s^{-2}).
Define-se o *newton* como a força que, aplicada a um corpo de massa 1 kg, produz neste uma aceleração de 1 m s^{-2}.

Outra unidade frequentemente usada em engenharia é o quilograma-força (kgf), definida como a força igual ao peso de uma massa de 1 kg. Assim, como o valor da aceleração da gravidade é g = 9,8 m s^{-2} (valor médio ao nível do mar), temos que o valor de 1 kgf = 9,8 N .

Exemplos:

Um automóvel de massa 1000 kg sobe uma rua inclinada de α = 20º com a horizontal. Determinar a força que o motor deve exercer para que o automóvel se mova: **a)** com movimento uniforme, **b)** com aceleração de 0,2 m s^{-2} . Determinar também em cada caso, a força que o solo exerce no automóvel.

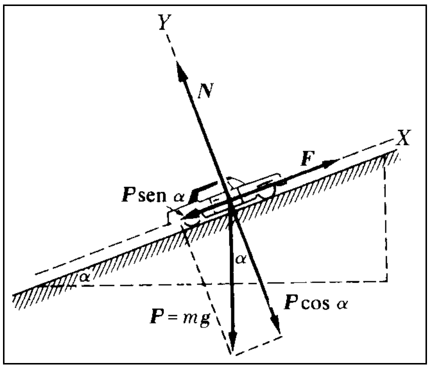


Figura 4.7 – Forças aplicadas no carro.

Solução: a) F = 3350 N , b) F = 3550 N

Um corpo de massa 10 kg está sujeito a uma força F = (120t + 40) N, movendo-se em linha recta. No instante t = 0 s o corpo está em x_0 = 5 m, com velocidade v_0 = 6 m s^{-1}.
Determinar a velocidade e posição do corpo em qualquer instante posterior.

Solução: $v(t) = 6t^2 + 4t + 6$ m s^{-1} , $x(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5$ m

4.3.1 Forças de Atrito

Sempre que quaisquer dois corpos estão em contacto, por exemplo um livro em repouso sobre uma mesa, existe uma resistência ao movimento relativo entre os dois corpos. Se empurrar-mos o livro ao longo da superfície da mesa, observamos que ele diminui progressivamente de velocidade até parar. A perda observada de velocidade (de quantidade de momento) - indica que uma força se opõe ao movimento - força essa chamada de atrito de escorregamento. Ela é devida à interacção das moléculas superficiais dos dois corpos em contacto (denominada de *coesão* ou *adesão*, dependendo dos corpos serem constituídos ou não pelo mesmo material). O atrito é um fenómeno bastante complexo e depende de muitos factores, tais como; a condição e natureza das superfícies, a velocidade relativa, etc.

Verifica-se experimentalmente que o módulo da força de atrito $\left|\vec{F}_a\right|$ é, para a maioria dos casos, proporcional à força normal (N) de contacto entre os corpos (figura 4.8). A constante de proporcionalidade é o chamado de coeficiente de atrito (μ), um número adimensional, (que se pode exprimir também em percentagem). O seu valor máximo é:

$$F_a = \mu N \qquad (4.18)$$

A força de atrito de deslizamento opõe-se sempre ao movimento do corpo, tendo assim uma direcção igual mas sentido oposto à velocidade do corpo.

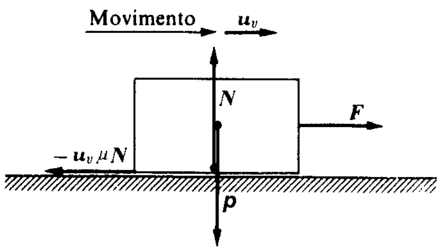


Figura 4.8 – Força de atrito na base de contacto entre um bloco e uma superfície.

Verificamos ainda experimentalmente a existência de dois tipos diferentes de coeficientes de atrito;

- ***estático* (μ_e)**, quando multiplicado pela força normal, dá a força mínima necessária para iniciar o movimento relativo entre os dois corpos, inicialmente em contacto e em repouso relativo.
- ***cinético* (μ_c)**, quando multiplicado pela força normal, dá a força necessária para manter os dois corpos em movimento relativo uniforme.

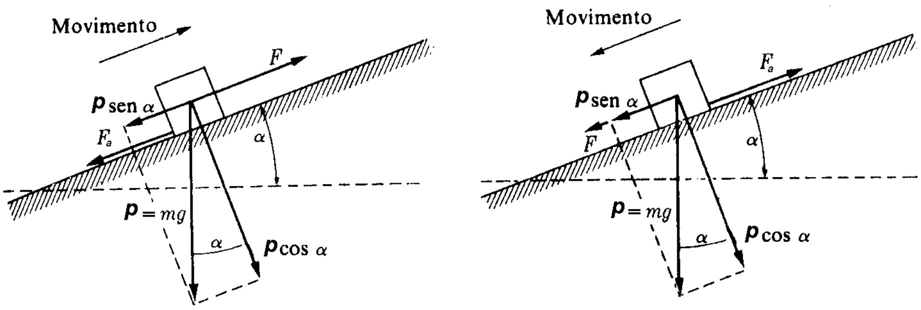
Determinações experimentais mostram que os valores de μ_e são sempre superiores aos valores de μ_c , (ver tabela 4.1).

Tabela 4.1 - Valores médios de coeficientes de atrito para diversos materiais.

Materiais	μ_e	μ_c
Aço duro / Aço duro	0,78	0,42
Aço doce / Aço doce	0,74	0,57
Chumbo / Aço doce	0,95	0,95
Cobre / Aço doce	0,53	0,36
Níquel / Níquel	1,10	0,53
Teflon / Teflon	0,04	0,04
Teflon / Aço	0,04	0,04
Borracha / Betão molhado	0,30	0,25
Borracha / Betão seco	1,0	0,8
Madeira / Madeira	0,5	0,4
Gelo / Gelo	0,1	0,03
Prancha de *ski* / Neve molhada	0,14	0,1
Juntas humanas	0,01	0,003

Exemplo:

Um corpo de massa igual a 0,8 kg é colocado sobre um plano inclinado de α = 30º com a horizontal. Que forças devem ser aplicadas no corpo para que ele se movimente, **a)** para cima , **b)** para baixo. Suponhamos em ambos os casos o corpo a mover-se uniformemente e com aceleração de 0,10 m s^{-2} . O coeficiente de atrito cinético é de 0,30.

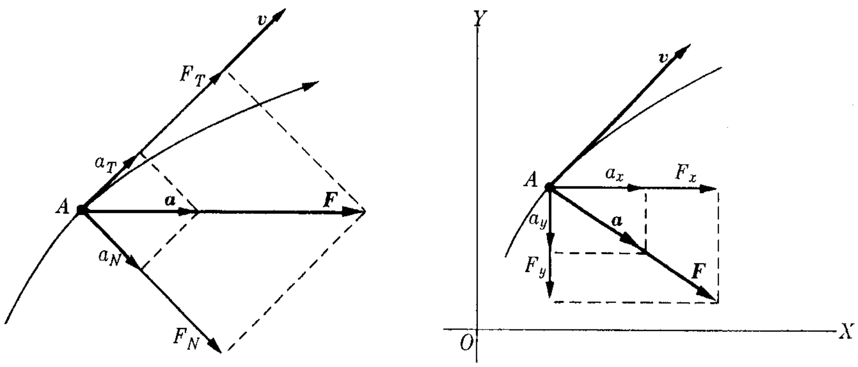


a) b)
Figura 4.9 – Bloco de massa m. a) Forças aplicadas na subida do bloco.
b) Forças aplicadas na descida do bloco.

Solução: a) F = 5,95 N (m.r.u.) e F = 6,03 N , b) F = 1,88 N (m.r.u.) e F = 1,80 N

4.4 Movimento Curvilíneo

Já sabemos que quando a força tem a direcção da velocidade, o movimento é rectilíneo. Para se ter um movimento curvilíneo, a força resultante deve formar um ângulo (diferente de 0° ou 180°) com a velocidade, para que a aceleração tenha uma componente perpendicular à velocidade, necessária para a variação de direcção do movimento da partícula. Por outro lado sabemos que a força é paralela à aceleração, como podemos ver na figura 4.10.



a) b)

Figura 4.10 – Forças num movimento curvilíneo. a) Componentes tangencial e normal.
b) Decomposição da força normal no sistema de eixos.

Da 2ª lei de *Newton*, $\vec{F} = m\vec{a}$ (expressão 4.14 e 4.15), concluímos (como já vimos) que, a componente tangencial - <u>força tangencial</u>, é:

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_T = m\frac{dv}{dt}\vec{u}_T \qquad (4.19)$$

e a componente perpendicular - <u>força normal</u>, é:

$$\vec{F}_N = m\vec{a}_N = \frac{mv^2}{\rho}\vec{u}_N \qquad (4.20)$$

(ρ é o raio de curvatura da trajectória)

A força normal aponta sempre para o centro de curvatura da trajectória. A força tangencial é responsável pela variação do módulo da velocidade, e a força normal é responsável pela variação da direcção da velocidade. Se a força tangencial for zero, não haverá aceleração tangencial e o movimento será uniforme (m.c.u.). Se a força normal for zero, não haverá aceleração normal e o movimento será rectilíneo (m.r.u.).

No caso particular do movimento circular, ρ é o raio R da circunferência e $v = \omega$ R, de modo que a força normal é denominada centrípeta,

$$F_N = m\omega^2 R \qquad (4.21)$$

No movimento circular uniforme só existe a aceleração normal, que podemos escrever na forma vectorial como:

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{v} \qquad (4.22)$$

(derivada temporal da expressão 3.53, do capitulo 3)

assim, $$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(m\vec{v}) \qquad (4.23)$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\omega}\times\vec{p}} \qquad (4.24)$$

uma relação matemática muito útil entre a força, a velocidade angular e a quantidade de movimento de uma partícula com movimento circular uniforme. Algumas vezes, torna-se conveniente o uso das componentes rectangulares da Força. No caso do movimento no plano, por exemplo, a equação vectorial $\vec{F} = m\vec{a}$ pode ser decomposta nas duas seguintes equações:

$$\vec{F}_X = m\vec{a}_X \qquad \text{e} \qquad \vec{F}_Y = m\vec{a}_Y$$

Por integração destas duas equações obtemos a velocidade e a posição da partícula em qualquer instante.

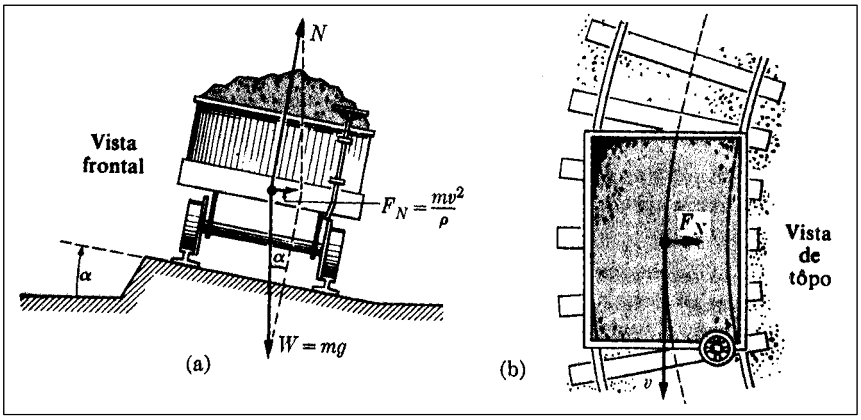
No caso geral, em que a massa do corpo é variável, temos de usar $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Mas sendo $\vec{p}$ paralelo ao vector velocidade é tangente à trajectória.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}\vec{u}_T + \frac{vp}{\rho}\vec{u}_N \tag{4.25}$$

Exemplos:

Inclinação das curvas

As vias-férreas e as estradas são inclinadas nas curvas de modo a produzir a força centrípeta solicitada pelos veículos em movimento nas curvas. O ângulo de inclinação em função da velocidade do veículo na curva, do raio de curvatura desta e da gravidade é dado por:



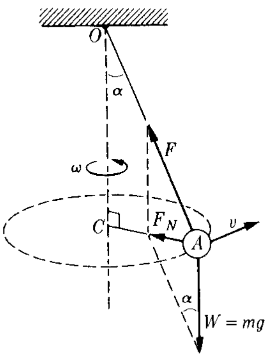
$$tg\,\alpha = \frac{v^2}{\rho g} \tag{4.26}$$

Figura 4.11 – Ângulo de inclinação de uma curva, forças aplicadas. (a) vista em corte (b) vista em planta.

O resultado é independente da massa do corpo.

Pêndulo cónico

Um fio de comprimento L, ligado a um ponto fixo, tem numa extremidade uma massa *m* que gira em torno da vertical com velocidade angular ω (constante). Este dispositivo é um pêndulo cónico. Achar o ângulo que a corda faz com a vertical, na situação de equilíbrio.



$$F_N = m\omega^2 R = m\omega^2 L\,sen\,\alpha \tag{4.27}$$

$$tg\,\alpha = \frac{F_N}{P} = \frac{\omega^2 L\,sen\,\alpha}{g} \tag{4.28}$$

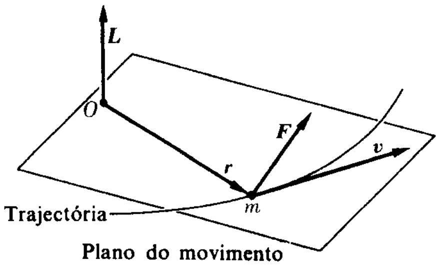
$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L} \tag{4.29}$$

Figura 4.12 – Forças aplicadas num pêndulo cónico.

Quanto maior a velocidade angular ω maior será o ângulo α, como nos mostra a experiência. Por essa razão, há muito tempo que o pêndulo cónico é usado como regulador de velocidade; por exemplo, para fechar a válvula de entrada de vapor quando a velocidade ultrapassa um certo limite pré fixado, e para a abri-la quando a velocidade diminui.

4.4.1 Momento Angular. Princípio de Conservação do Momento Angular

O momento angular (também denominado momento orbital, ou momento da quantidade de movimento), em relação ao ponto O, de uma partícula de massa m movendo-se com velocidade $\vec{v}$ (e portanto com quantidade de movimento $\vec{p} = m\vec{v}$) é definido pelo produto vectorial,

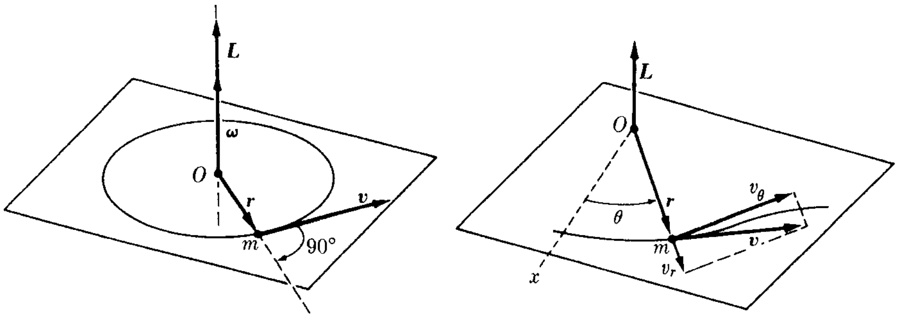


$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \qquad (4.30)$$

ou $$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad (4.31)$$

Figura 4.13 – Momento angular de uma partícula, em relação a O.

O momento angular é portanto, um vector perpendicular ao plano determinado por $\vec{r}$ e $\vec{v}$. De um modo geral, o momento angular de uma partícula varia em módulo e direcção durante o movimento da partícula. Entretanto, se o movimento da partícula ocorre num plano, e se o ponto O pertence ao plano, a direcção do momento angular permanece constante e perpendicular ao plano (figura 4.14), visto que $\vec{r}$ e $\vec{v}$ estão contidos no plano (e definem o plano do movimento).



a) b)

Figura 4.14 – Momento angular numa trajectória plana. Componentes da velocidade.

No caso do movimento circular, quando O é o centro da circunferência, os vectores $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, e $v = \omega r$, de modo que L = m r v =.m r^2 ω

O sentido de $\vec{L}$ coincide com o sentido de $\vec{\omega}$ (são vectores paralelos), de modo que temos:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \qquad (4.32)$$

Se o movimento curvilíneo é plano mas não circular, podemos decompor a velocidade em componentes radial e transversal (figura 4.14 b)

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \qquad (4.33)$$

e podemos reescrever o momento angular como:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta \tag{4.34}$$

como, $v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$ temos que: $L = mr^2\dfrac{d\theta}{dt}$ (4.35)

(os vectores $\vec{r}$ e $\vec{v}_r$ são paralelos, logo $\vec{r} \times \vec{v}_r = \vec{0}$)

Podemos escrever o momento angular como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_X & p_Y & p_Z \\ \vec{u}_X & \vec{u}_Y & \vec{u}_Z \end{vmatrix} \tag{4.36}$$

Tomemos agora a derivada em relação ao tempo, isto é,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{4.37}$$

como $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$, temos então que;

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}} \tag{4.38}$$

"a variação temporal do momento angular de uma partícula é igual ao momento da força aplicada na partícula"

O membro direito da expressão (4.38) é o momento da força $\vec{\tau}$ (em relação a um mesmo ponto). O que significa que a variação temporal do momento angular resulta da existência de um momento de uma força aplicada.

"Se o momento das forças aplicadas for nulo verificamos que o Momento Angular permanece constante ao longo do tempo"

Este é o **Princípio de Conservação do Momento Angular**.