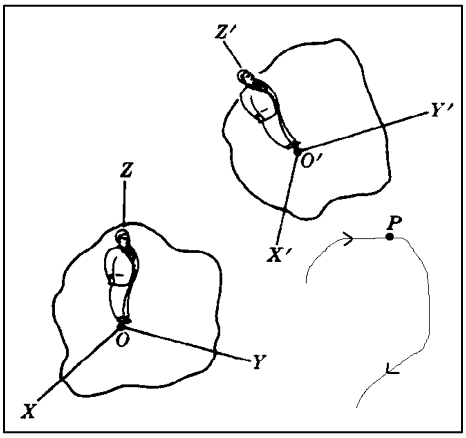
Capítulo 3 – Cinemática do ponto material.

3.1 Movimento Relativo

Um ponto (um objecto) exibe um movimento em relação a outro, quando a sua posição espacial medida relativamente a esse segundo corpo - **varia com o tempo**.

Quando isto não acontece, diz-se que o ponto está em - **repouso relativo** – a esse objecto.

Repouso e **movimento** como conceitos **relativos** - dependem da escolha do referencial, não são conceitos absolutos.



Quando estudamos os problemas do movimento, temos sempre que definir um **sistema de referência** ou **referencial**, para que não tenhamos dúvidas sobre a sua trajectória (medida nesse referencial.).

Figura 3.1 – Dois observadores (dois referenciais distintos) estudam o movimento de *P* no espaço.

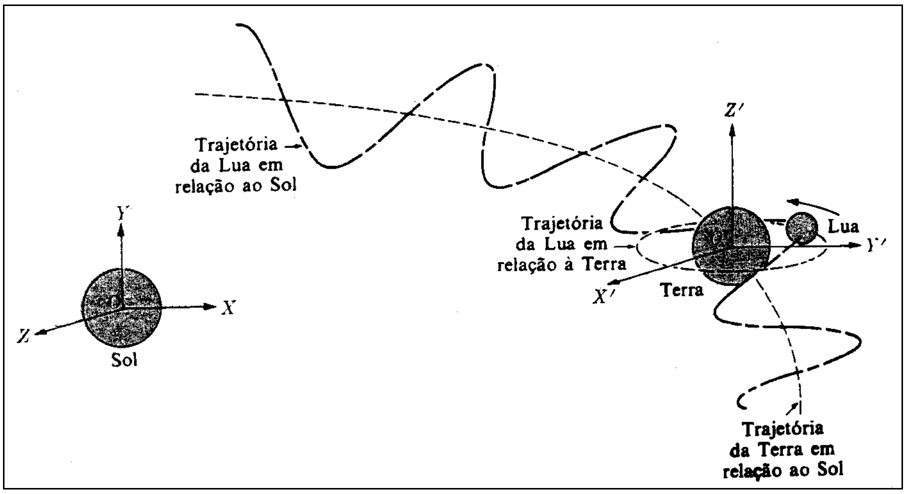


Figura 3.2 – Representação da orbita da Lua relativamente à Terra e ao Sol.
As distâncias e a trajectória da Lua não estão à escala.
(a distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes superior à distância Terra-Lua).

3.2 Movimento Rectilíneo

3.2.1 Velocidade

O movimento de um ponto material **é rectilíneo** quando a sua trajectória é uma **recta**.

Considerando o movimento a uma dimensão (ao longo do eixo do XX), a posição de um ponto é definida pelo seu deslocamento *x* medido a partir de um ponto arbitrário O, a origem.

Podemos relacionar a posição com o tempo e assim obter uma **relação funcional :** $x = f(t)$

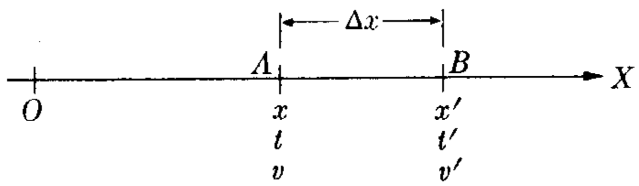


Figura 3.3 – Duas sucessivas posições de um ponto, no tempo e no espaço.

Ocupando o corpo distintas posições (obviamente em distintos tempos), podemos definir a ***velocidade média*** entre esses dois pontos (e instantes) como,

$$v_{med} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

Velocidade média - durante um determinado intervalo de tempo Δt
é igual ao deslocamento médio Δx por <u>unidade de tempo</u>, durante o intervalo de tempo

Velocidade Instantânea (num ponto) - toma-se o intervalo de tempo Δt tão pequeno quanto possível, ou seja, toma-se o valor limite quando Δt tende para zero (0).

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

Isto não é mais do que tomar a derivada de *x* em relação ao tempo *t*; vindo,

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \qquad (3.3)$$

A **Velocidade Instantânea** é obtida pelo cálculo da derivada do deslocamento, em relação ao tempo. (Na prática, nos nossos instrumentos é sempre num pequeno intervalo de tempo, e portanto, não uma medição instantânea).

Sabendo $v = f(t)$ - a posição *x* pode ser obtida por integração, pois $dx = v\,dt$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = x - x_o \qquad \text{e} \qquad x = x_o + \int_{t_0}^{t} v\,dt \qquad (3.4)$$

vdt - que tem a grandeza de um comprimento é o deslocamento do corpo durante o pequeno intervalo de tempo dt.

Exemplo de aplicação - Velocidade média *versus* Velocidade instantânea
Uma partícula move-se ao longo do eixo XX de tal modo que a sua posição em qualquer instante é dada pela função $x(t) = 5t^2 + 1$ (com x dado em metro e t em segundo - S.I.).

Calcular a velocidade média nos seguintes intervalos de tempo:
[2, 3] s [2, 2,1] s [2, 2,001] s [2, 2,0001] s
Calcular agora a velocidade instantânea no instante $t = 2$ s .
Comparar os resultados e verificar a relação entre as *duas velocidades*.

3.2.1 Aceleração

Regra geral a velocidade de um corpo é função do tempo. Quando não, e a velocidade é constante (invariável no tempo) - ***o movimento é dito uniforme***.

Se as velocidade foram distintas (v em t e v' em t' - na figura 3.3) podemos então definir a **aceleração média** (entre os pontos A e B), como:

$$a_{med} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3.5}$$

com Δv a variação de velocidade $(v'-v)$ e Δt o tempo decorrido $(t'-t)$.

Aceleração média - durante um determinado intervalo de tempo Δt
é a variação da velocidade Δv ***por unidade de tempo , durante o intervalo de tempo***

Aceleração Instantânea - é o valor limite da aceleração média, quanto o intervalo de tempo Δt tende para zero (0).

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3.6}$$

é a derivada de v em relação ao tempo t; isto é;

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \tag{3.7}$$

Mas em geral, a aceleração varia durante o movimento. Um movimento rectilíneo com aceleração (tangencial) constante é dito ***uniformemente acelerado***.

- se a velocidade aumenta (em módulo) temos um movimento acelerado,
- se a velocidade diminui (em módulo) temos um movimento retardado.

A partir da aceleração podemos calcular a velocidade por integração (***dv = a dt***),

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt = v - v_o \qquad v = v_o + \int_{t_0}^{t} a dt \tag{3.8}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \qquad a = \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{3.9}$$

ou seja, de $dv = a\, dt$, vem que $v\, dv = a\, dx$, vindo,

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a dx \qquad \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}{v_0}^2 = \int_{x_0}^{x} a dx \tag{3.10}$$

[aplicação dos conhecimentos de derivadas e primitivas de funções polinomiais]

3.2A Movimento Rectilíneo Uniforme

Como v é constante, a = 0 ms^{-2} , e

$$x = x_o + \int_{t_0}^{t} v dt = x_o + v\int_{t_0}^{t} dt = x_o + v(t - t_0) \tag{3.11}$$

$$\boxed{x = x_o + v(t - t_0)} \tag{3.12}$$

expressão do movimento rectilíneo uniforme, a uma dimensão

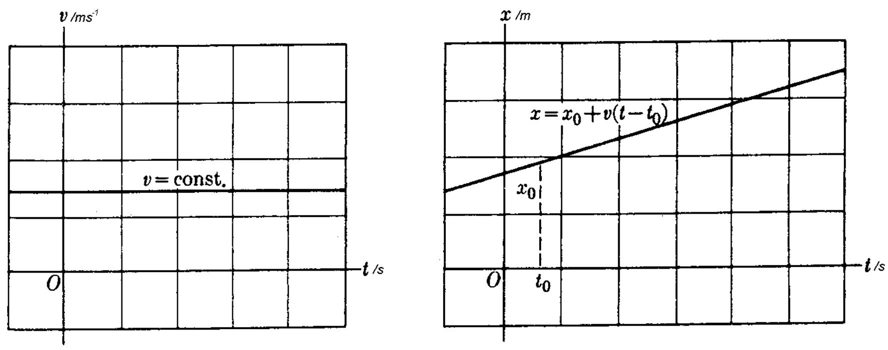


Figura 3.4 – Gráficos com as representações da função velocidade e deslocamento, no movimento uniforme.

3.2B Movimento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

Neste caso a aceleração a é constante.

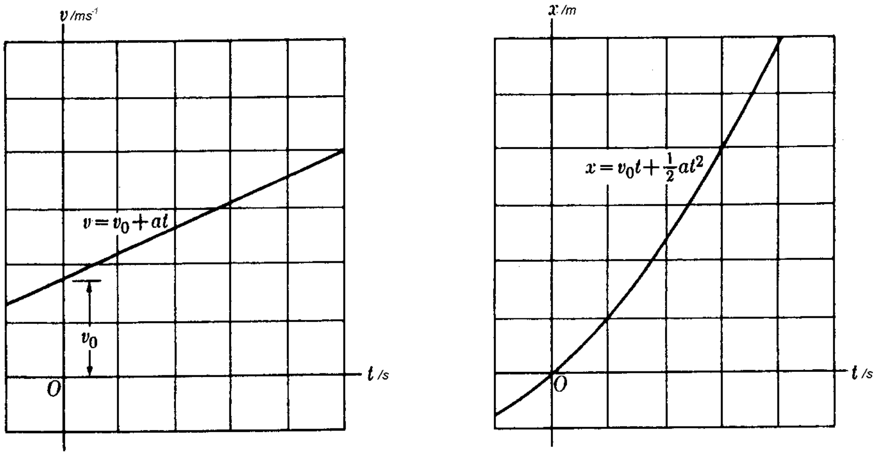
$$v(t) = v_o + \int_{t_0}^{t} a dt = v_o + a\int_{t_0}^{t} dt = v_o + a(t - t_0) \tag{3.13}$$

$$x(t) = x_o + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt = x_0 + v_0\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt \tag{3.14}$$

$$\boxed{x(t) = x_o + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2} \tag{3.15}$$

expressão do movimento rectilíneo uniformemente acelerado, a uma dimensão

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}{v_0}^2 = a\int_{x_0}^{x} dx = a(x - x_0) \qquad \text{o que dá:} \qquad \boxed{v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0)} \tag{3.16}$$



(considerando $t_0 = 0$ s)

Figura 3.5 – Gráficos com as representações da função velocidade e deslocamento, no movimento uniformemente acelerado.

A queda de qualquer corpo na proximidade da superfície da Terra é (em primeira análise) um exemplo típico de um movimento rectilíneo uniformemente acelerado. A aceleração da gravidade perto da superfície da Terrestre é, em primeira aproximação, constante em intensidade e define o nosso sentido de vertical.

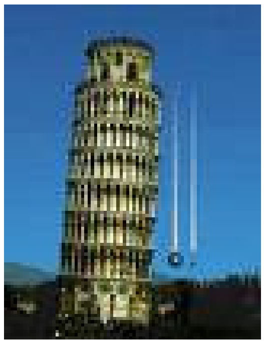


Figura 3.6 – Queda de graves.

3.3 Movimento Curvilíneo

3.3.1 Velocidade

Consideremos uma partícula a descrever uma **trajectória curvilínea *C***, como ilustrado na figura 3.7.

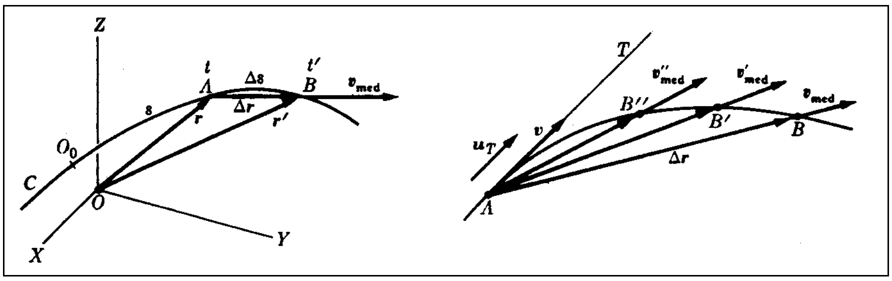


Figura 3.7 – Representação de uma trajectória curvilínea *C*. Sucessivas posições e velocidades médias.

No instante ***t***, a partícula ocupa o ponto ***A***, expresso pelo vector posição $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$.

Num instante posterior ***t'***, a partícula ocupa o ponto ***B***, com $\vec{r}' = \overrightarrow{OB} = x'\,\vec{u}_x + y'\,\vec{u}_y + z'\,\vec{u}_z$.

O movimento ocorre ao longo do arco AB = Δs, sendo o deslocamento o vector $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$ ($\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$),

vindo; $\overrightarrow{AB} = \Delta x\,\vec{u}_x + \Delta y\,\vec{u}_y + \Delta z\,\vec{u}_z$ ($\Delta x = x' - x,\ \Delta y = y' - y\ e\ \Delta z = z' - z$)

logo, $$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{u}_z \tag{3.17}$$

a velocidade média é representada por um vector paralelo ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$.

Para o cálculo da velocidade instantânea, tomamos Δt tão pequeno quanto possível, ou seja toma-se (como já vimos) o valor limite quando Δt tende para zero;

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \tag{3.18}$$

Quando o ponto ***B*** tende para o ponto ***A***, o vector $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$ coincide com a direcção tangencial AT (versor $\vec{u}_T$).

No **movimento curvilíneo** a **velocidade instantânea** é um **vector tangente à trajectória**, dado por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \tag{3.19}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt}\ \text{ e }\ v_z = \frac{dz}{dt}, \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.20}$$

Podemos obter o mesmo resultado, usando um ponto arbitrário sobre a trajectória (O_0), assim $s = O_0A$ dá-nos a posição da partícula medida pelo deslocamento ao longo da curva (trajectória).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \tag{3.21}$$

$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ é um vector unitário com direcção tangencial à trajectória (no ponto A),

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_T \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{3.22}$$

ou seja, podemos reescrever a **velocidade instantânea** como:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\,\vec{u}_T} \tag{3.23}$$

3.3.2 Aceleração

Neste tipo de movimento (curvilíneo), a velocidade, varia tanto em módulo como em direcção.

- variação de módulo: aumento ou diminuição da velocidade
- variação de direcção: porque a velocidade é tangente à curva (trajectória)

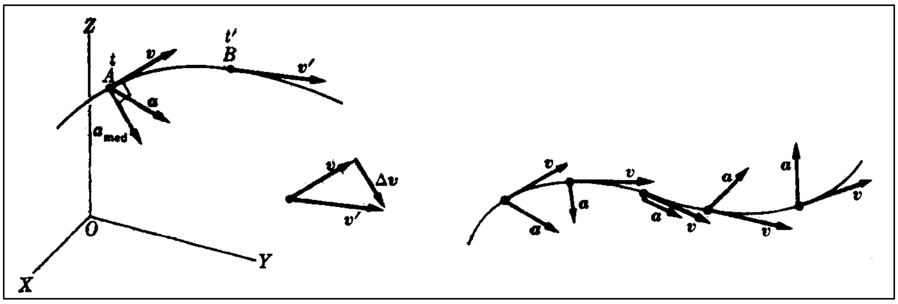


Figura 3.8 – Representação de uma trajectória curvilínea e variação da velocidade instantânea.

No instante ***t***, a partícula ocupa o ponto ***A***, e no instante posterior ***t'***, a partícula ocupa o ponto ***B***, sendo a variação de velocidade entre esses instantes expressa (no triângulo) por $\Delta\vec{v}$, $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ e $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$,

logo a aceleração média em Δt é o vector:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} \qquad (3.24)$$

que é paralelo ao vector $\Delta\vec{v}$

Da mesma forma que para a velocidade, temos as relações semelhantes:

$$\vec{v} = v_x\,\vec{u}_x + v_y\,\vec{u}_y + v_z\,\vec{u}_z \qquad (\Delta\vec{v} = \Delta v_x\,\vec{u}_x + \Delta v_y\,\vec{u}_y + \Delta v_z\,\vec{u}_z) \qquad (3.25)$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{u}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{u}_z \qquad (3.26)$$

3.3.3 Aceleração instantânea

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_{med} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} \qquad (3.27)$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad (3.28)$$

A aceleração é um vector que tem a direcção da variação instantânea da velocidade, e como esta varia na direcção da curvatura da trajectória, <u>a aceleração é sempre dirigida para a concavidade da curva.</u>

Podemos então definir a aceleração como:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{3.29}$$

com componentes: $$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2}\ e\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.30}$$

e módulo $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

3.3.4 Movimento curvilíneo com aceleração constante

De especial importância é o caso de termos a aceleração constante em módulo e direcção.
Se $\vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$ **,** (de $d\vec{v} = \vec{a}dt$) temos;

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt = \vec{a}(t - t_0) \tag{3.31}$$

e como,

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 \tag{3.32}$$

vem que,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \tag{3.33}$$

mas sabendo que $d\vec{r} = \vec{v}dt$, logo chegamos a:

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0))dt = \vec{v}_0\int_{t_0}^{t} dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt \tag{3.34}$$

e como

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \tag{3.35}$$

vem então: $$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2} \tag{3.36}$$

expressão vectorial do movimento curvilíneo com aceleração constante

- a velocidade $\vec{v}_0$ e a aceleração $\vec{a}$ podem ter direcções diferentes,
- mas, a velocidade $\vec{v}_0$ e a aceleração $\vec{a}$ estão sempre contidas no mesmo plano,
- o vector $\vec{r}$ está sempre contido nesse plano,

Concluímos que um movimento com aceleração constante é sempre plano e que a sua trajectória é uma parábola (um arco de parábola)

A aplicação mais imediata deste resultado ocorre no estudo do movimento de corpos perto da superfície terrestre, onde podemos considerar a aceleração (na direcção vertical) constante e igual a $g = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$.

Definindo o plano XY, onde existem a $\vec{v}_0$ e $\vec{a} = \vec{g}$ $(\vec{g} = -g\,\vec{u}_y)$

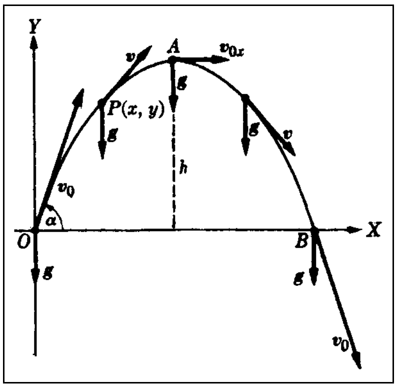


Figura 3.9 – Representação de uma trajectória curvilínea a duas dimensões.

Podemos escrever $\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{u}_x + v_{oy}\vec{u}_y$

Com as componentes iniciais da velocidade: $v_{ox} = v_o \cos\alpha$ e $v_{oy} = v_o sen\alpha$

Tomando $t_0 = 0$ s , vem:

$$\boxed{\vec{v} = v_{ox}\vec{u}_x + (v_{oy} - gt)\vec{u}_y} \qquad (3.37)$$

expressão vectorial da velocidade

- a componente da velocidade segundo a direcção XX permanece constante (pois a não existe aceleração segundo essa componente)

Considerando que o corpo se encontra na origem do referencial em $t_0 = 0$ s $(\vec{r}_0 = \vec{0})$, podemos também escrever;

$$\boxed{\vec{r} = v_{ox}t\,\vec{u}_x + (v_{oy}t - \tfrac{1}{2}gt^2)\vec{u}_y} \qquad (3.38)$$

expressão vectorial da posição

ou, analisando as componentes; $x = v_{ox}t$ e $y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$, que representam as coordenadas do corpo ao longo do tempo (em função do tempo).

Tempo necessário para o corpo atingir o ponto mais alto da trajectória

Condição para atingir o ponto mais alto da trajectória: $v_y = 0$ ms^{-1}

Vem então como solução: $$t_s = \frac{v_0 sen\alpha}{g} \text{ s} \qquad (3.39)$$

A correspondente altitude máxima acima do ponto de lançamento, será:

$$h_{\max} = \frac{v_0^{\,2} sen^2\alpha}{2g} \text{ m} \qquad (3.40)$$

Tempo necessário para o corpo voltar ao nível do lançamento

Tempo de voo t_{voo} é igual ao dobro do t_s e o correspondente alcance máximo é:

$$D_{\max} = v_{ox}\frac{2v_0 sen\alpha}{g} = \frac{v_0^{\ 2} sen 2\alpha}{g} \quad \text{m} \tag{3.41}$$

O valor que majora o alcance máximo ocorre para um ângulo de lançamento $\alpha = 45°$

A equação da trajectória do corpo é obtida eliminando o tempo t na equação (3.38), o que dá:

$$\boxed{y = -\frac{g}{2v_0^{\ 2}\cos^2\alpha}x^2 + x\,tg\alpha} \tag{3.42}$$

Equação que representa a trajectória - uma parábola (com concavidade voltada para baixo)

Estes resultados só são válidos como uma aproximação, quando:

1. o alcance máximo é suficientemente pequeno para que possamos desprezar a curvatura do nosso planeta Terra,

2. a altitude é suficientemente pequena para que a variação da gravidade com a altura possa ser desprezada (variação em módulo e direcção),

3. a velocidade inicial é suficientemente pequena para que se possa desprezar a resistência (atrito) do ar.

Exemplo:

É disparado um projéctil com velocidade inicial $|\vec{v}_0| = 200 \ \text{ms}^{-1}$, fazendo um ângulo de lançamento de 40° com a horizontal. Achar a velocidade e a posição do projéctil aos 20 s . Achar também o alcance máximo e o tempo necessário para o projéctil atingir o solo.

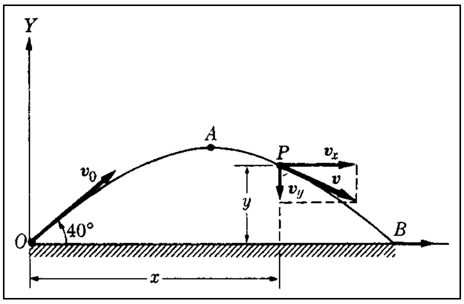


Figura 3.10 – Lançamento de um projéctil.

Solução:

$\vec{v}(20) = 153{,}2\,\vec{u}_x - 67{,}4\,\vec{u}_y \ \text{ms}^{-1}$ $\qquad$ $\vec{r}(20) = 3064\,\vec{u}_x - 612\,\vec{u}_y \ \text{m}$

altura máxima = 843,7 m , $\qquad$ alcance máximo = 4021 m , no instante t = 26,24 s

3.3.5 Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Vamos considerar que no instante t , a partícula se encontra no ponto A, com velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$. Como sabemos que a aceleração está sempre dirigida para a concavidade da trajectória, a sua decomposição segundo uma componente tangencial $\vec{a}_T$ - paralela à tangente AT - é denominada **aceleração tangencial.** A componente normal $\vec{a}_N$ - paralela à normal AN (perpendicular a AT) - é denominada **aceleração normal.**

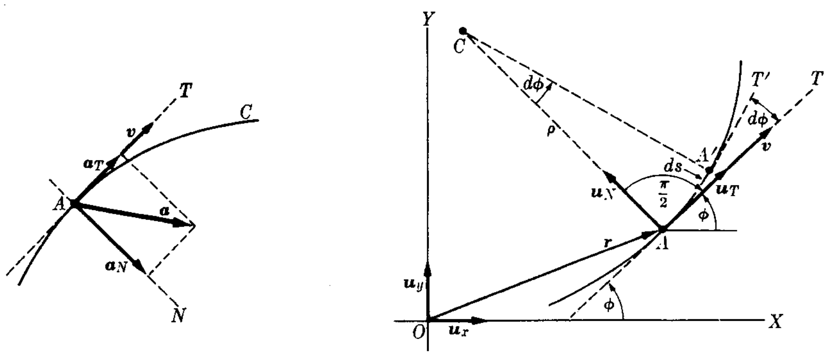


Figura 3.11 – Componentes da aceleração no movimento curvilíneo.

Cada uma destas componentes tem um significado físico bem definido:

Variação no módulo da velocidade : aceleração tangencial

Variação na direcção da velocidade : aceleração normal

Consideremos a figura anterior. A velocidade é $\vec{v} = v\,\vec{u}_T$ a sua aceleração será:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{d\vec{u}_T}{dt}v \qquad (3.43)$$

(se a trajectória fosse uma linha recta, o vector $\vec{u}_T$ seria constante na direcção, logo invariável no tempo, vindo a sua derivada nula)

Mas sendo a trajectória uma curva, o vector $\vec{u}_T$ varia ao longo desta. Vamos verificar qual a sua variação. Para isso introduzimos o vector unitário $\vec{u}_N$, normal à curva e no sentido da sua concavidade. Tomemos também o ângulo ϕ que a tangente à curva no ponto A faz com o eixo dos XX. Temos então:

$$\vec{u}_T = \cos\phi\,\vec{u}_x + sen\phi\,\vec{u}_y \qquad (3.43)$$

e

$$\vec{u}_N = \cos(\phi + \frac{\pi}{2})\,\vec{u}_x + sen(\phi + \frac{\pi}{2})\,\vec{u}_y = -sen\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y \qquad (3.45)$$

então:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = -sen\phi\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_x + \cos\phi\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_y = \frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N \qquad (3.46)$$

o que nos indica que a variação do versor tangencial é normal à curva.

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\phi}{ds} \tag{3.47}$$

sendo $ds = AA'$ o pequeno arco de trajectória percorrido pela partícula no intervalo de tempo dt. As normais à curva em A e A' interceptam-se no ponto C - centro de curvatura. Definimos o Raio de Curvatura como $\rho = \overline{CA}$, ds será então ds = ρ dϕ ou seja $\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$, vindo $\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{\rho}$

e

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{u}_N} \tag{3.48}$$

temos por conseguinte, que;

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N} \tag{3.49}$$

O primeiro termo é um vector tangente à curva e é proporcional à variação no tempo do módulo da velocidade - **é a aceleração tangencial**. O segundo termo é um vector normal à curva e corresponde - **à aceleração normal**. O módulo da aceleração será então dão por:

$$\boxed{a = \sqrt{a_T^{\,2} + a_N^{\,2}}} \tag{3.50}$$

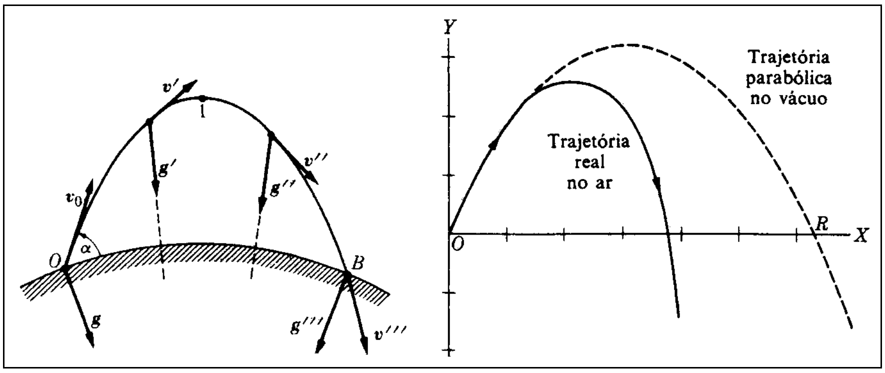


Figura 3.12 – Trajectória parabólica de um projéctil, perto da superfície da Terra. Efeito da direcção da aceleração da gravidade e efeito da atmosfera (atrito do ar).

3.3.6 Movimento Circular: Velocidade Angular

Consideremos agora o caso particular em que a trajectória é uma circunferência, ou seja vamos tratar do **movimento circular**.

O vector velocidade, sendo tangente à circunferência, é sempre perpendicular ao raio $R = \overline{CA}$. Medindo distâncias ao longo da circunferência a partir do ponto O, temos que $s = R\theta$. Como o raio R permanece constante, obtemos;

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad \text{A grandeza} \quad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \tag{3.51}$$

ω tem o nome de **velocidade angular**. É a taxa de variação angular por unidade de tempo. É expressa em radianos por segundo (rad s^{-1}), ou simplesmente s^{-1}.

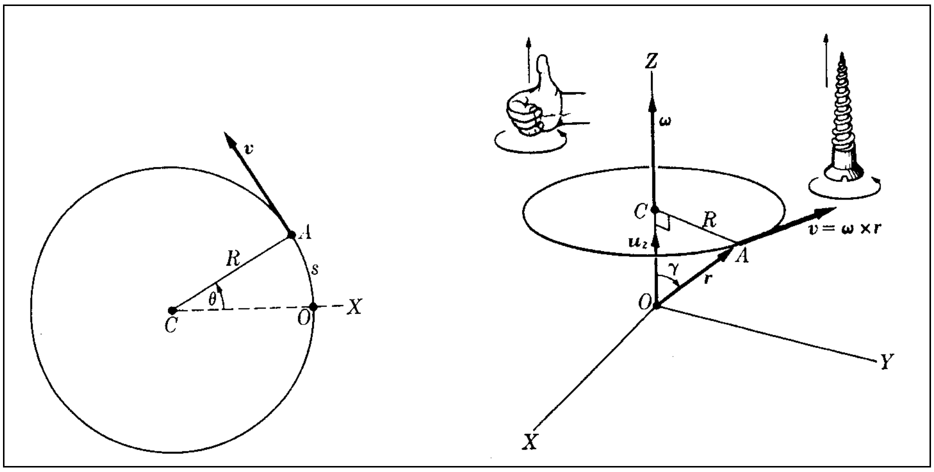


Figura 3.13 – Trajectória circular, velocidades tangencial e angular.

Assim:

$$\boxed{v = \omega R} \tag{3.52}$$

A velocidade angular também pode ser expressa como uma grandeza vectorial, de direcção perpendicular ao plano do movimento e de sentido dado pela "regra do saca-rolhas" (regra da mão direita).

Na figura 3.13 vemos que $R = r\, sen\gamma$ e que $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_Z$, logo podemos escrever que;

$v = \omega\, r\, sen\,\gamma$ ou seja, que:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{3.53}$$

(somente válida para movimentos com r e γ constantes).

3.3.7 Movimento Circular Uniforme

ω é constante, o que implica que o movimento é periódico e constante, ou seja a partícula passa pelo mesmo ponto da circunferência a intervalos regulares de tempo. O **período P** é o tempo necessário para a partícula completar uma revolução (unidade *s*). A **frequência *f*** é o número de revoluções na unidade de tempo (unidade s^{-1} ou Hz).

$$f = \frac{1}{P} \tag{3.54}$$

Estes conceitos de Período e Frequência são aplicados a todos os processos periódicos que ocorrem de uma forma cíclica, processos que se repetem após cada ciclo completo. Por exemplo, o movimento da Terra em redor do Sol, não sendo um movimento circular nem uniforme, é no entanto periódico.

Mas se ω é constante, então:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt = \omega \int_{t_0}^{t} dt \tag{3.55}$$

o que implica;

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 + \omega\,(t - t_0)} \tag{3.56}$$

tomando $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$ s , temos: $\theta = \omega\, t$ ou $\omega = \theta / t$

Numa revolução completa, obtemos; $t = \mathrm{P}$ e $\theta = 2\pi$, logo,

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi / \mathrm{P} = 2\pi f} \tag{3.57}$$

Exemplo:
Calcule a velocidade angular da Terra em torno do seu eixo. O período de rotação da Terra é de 23h 56min 4,09 s (P = 86164,09 s). Calcule a velocidade linear à latitude de Tomar (39,5ºN). Raio Terrestre ≈ 6350 km. **Solução:** $\omega = 7{,}2921\times10^{-5}$ rad s^{-1} e $v = 357$ ms^{-1}

3.3.8 Movimento Circular: Aceleração Angular

Quando a velocidade angular de uma partícula varia no tempo, podemos definir a aceleração angular, como;

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}} \tag{3.58}$$

Uma vez que o movimento circular é plano (ocorre sempre no mesmo plano), a direcção de ω mantém-se inalterada no espaço, logo podemos tomar os módulos das grandezas, isto é;

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.59}$$

No caso particular da aceleração angular α ser constante (movimento circular uniformemente acelerado), temos:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt \tag{3.60}$$

Vindo,

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0)} \tag{3.61}$$

(sendo ω_0 a velocidade angular no instante t_0)

como $d\theta/dt = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0)$, integrando vem:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\, dt \tag{3.62}$$

de modo que,

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha (t - t_0)^2} \tag{3.63}$$

e as,

Aceleração Tangencial:

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha} \tag{3.64}$$

Aceleração Normal:

$$\boxed{a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R} \tag{3.65}$$

3.4 Movimento Relativo

Conceito Relativo **-** deve ser sempre referido a um referencial específico, escolhido pelo observador.

Quando observadores diferentes descrevem o mesmo acontecimento, usando referenciais distintos, é muito importante saber relacionar as suas observações, ou seja, saber relacionar os referenciais.

Exemplo:

- observações realizadas na Terra - são na maioria dos casos referidas a referenciais ligadas ao nosso planeta e que com ele se movem,
- os astrónomos preferem referir o movimento de um corpo celeste em relação às "estrelas fixas",
- em Física Atómica, o movimento dos electrões é determinado relativamente ao núcleo atómico.

A busca do Referencial Absoluto (e também do tempo absoluto), ou seja um referencial em repouso relativamente ao espaço "*vazio*" (e depois ao espaço preenchido de "*éter*") - verificou-se infrutífera - não existem elementos no espaço que sirvam de referência absoluta.

3.4.1 Velocidade Relativa

Vamos considerar dois pontos móveis, A e B , e um observador situado em O, na origem de um referencial XYZ (figura 3.14).

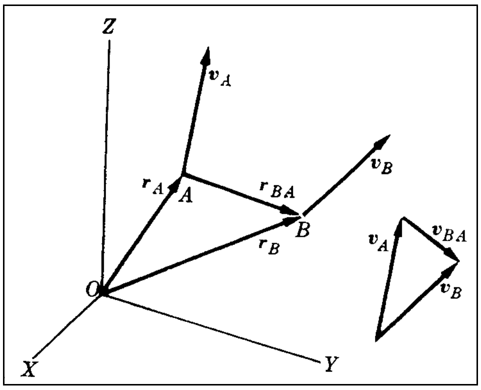


Figura 3.14 – Velocidades de dois pontos em relação a um referencial.

As velocidades de A e B relativas a O são, respectivamente:

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \qquad \text{e} \qquad \vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} \tag{3.66}$$

então a velocidade de $\underline{B \text{ em relação a } A}$, é:

$$\vec{V}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \tag{3.67}$$

e

a velocidade de A em relação a B , é:

$$\vec{V}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \tag{3.68}$$

onde,

$$\vec{r}_{BA} = \overline{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad \text{e} \quad \vec{r}_{AB} = \overline{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \tag{3.69}$$

(como $\vec{r}_{AB} = -\vec{r}_{BA}$, temos que $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$, ou seja, as velocidades relativas de *A* para *B* e de *B* em relação a *A* têm igual módulo, mas sentidos opostos)

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \tag{3.70}$$

Para obter a velocidade relativa entre dois corpos, temos de subtrair as suas velocidades relativas ao observador.

3.4.2 Aceleração Relativa

Obtemos a aceleração de B em relação a A, derivando em ordem ao tempo a respectiva velocidade relativa de B em relação a A,

$$\frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt} \tag{3.71}$$

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \tag{3.72}$$

onde $\vec{a}_B$ é a aceleração de B relativa a O, e $\vec{a}_A$ é a aceleração de A relativa a O.

Exemplo:

Um avião A voa para norte a 300 kmh^{-1} em relação ao solo. Ao mesmo tempo, outro avião B voa no sentido N60W a 200 kmh^{-1} em relação ao solo, como representado na figura 3.15. Calcular a velocidade de A relativamente a B, e de B relativamente a A.

Solução: $\left|\vec{V}_{AB}\right| = 264{,}57$ kmh^{-1} no sentido N 40,89º E .

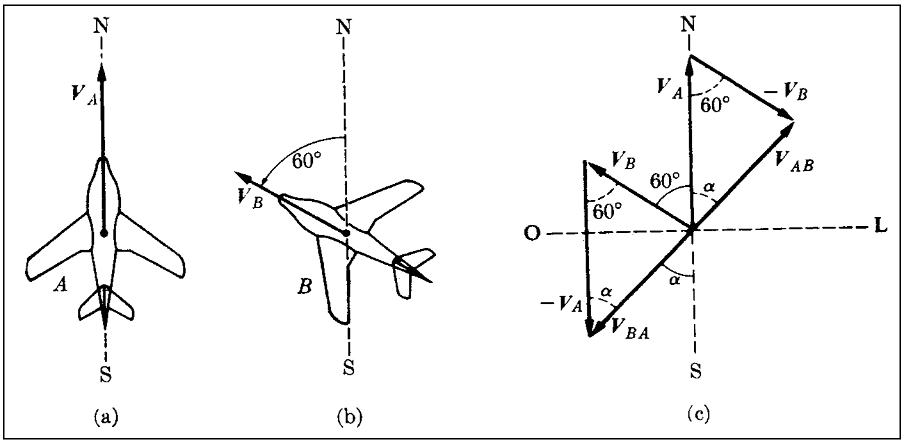


Figura 3.15 – a) Avião A, a voar no sentido norte. b) Avião B, a voar no sentido N60W. c) Representação dos vectores velocidade relativa.

3.4.3 Movimento Relativo de Translação Uniforme

Consideremos dois observadores O e O' que se deslocam um em relação ao outro com movimento uniforme de translação (e que não giram/rodam um relativamente ao outro). O observador O vê o observador O' mover-se com velocidade $\vec{v}$.

Queremos comparar as descrições que estes observadores fazem de um objecto, por exemplo, de um avião (ponto *A*) em voo, quando visto por um observador no cais de embarque e por outro num comboio com movimento uniforme. Para simplificar os eixos *XYZ* são paralelos aos eixos *X'Y'Z'*, e os dois referenciais coincidem em $t = 0$ s.

Deste modo:

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{v}t \qquad\qquad \vec{v} = v\,\vec{u}_x$$

Com o movimento relativo entre os observadores a ocorrer ao longo do eixo dos XX

Consideremos a partícula *A*,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$

ou seja

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

nas três equações escalares;

$$\boxed{x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t} \tag{3.73}$$

Transformação de Galileu

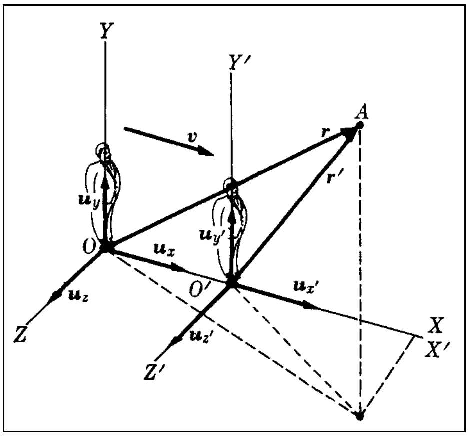


Figura 3.16 – Movimento relativo de translação uniforme.

A velocidade $\vec{V}$ de *A* relativa a O é definida por:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \tag{3.74}$$

e a,

velocidade $\vec{V}'$ de *A* relativa a O' é definida por:

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} \tag{3.75}$$

ou seja,

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v} \qquad (3.76)$$

nas suas três componentes;

$$V'_{x'} = V_x - v \qquad V'_{y'} = V_y \qquad V'_{z'} = V_z$$

As acelerações de A relativas a O e O' são $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ e $\vec{a}' = \dfrac{d\vec{V}'}{dt}$, respectivamente,

Obtemos então que;

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} \qquad \text{ou que} \qquad \vec{a} = \vec{a}' \qquad (3.77)$$

$(a'_x = a_x \ , \ a'_y = a_y \ , \ a'_z = a_z)$

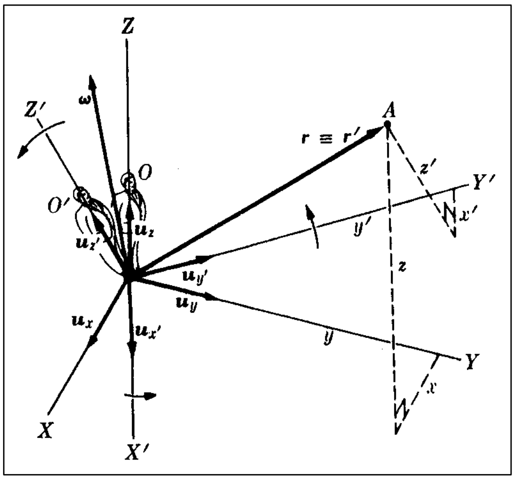
Ambos os observadores medem a mesma aceleração do ponto *A*. A aceleração de uma partícula é a mesma para todos os observadores em movimento relativo de translação uniforme. A **aceleração é um invariante** quando passamos de um referencial a outro qualquer, animado de movimento relativo de translação uniforme.

3.5 Movimento Relativo de Rotação Uniforme

3.5.1 Velocidades Relativas

Consideremos dois observadores O e O' animados de um movimento relativo de rotação, mas sem movimento relativo de translação. Para simplificar, admitimos que os dois referenciais a eles ligados têm a mesma origem, são coincidentes. O observador O está ligado a um referencial *XYZ* , e o observador O' a um referencial *X'Y'Z'* que roda com velocidade angular constante $\vec{\omega}$.

Assim, o observador O vê o referencial do observador O' (*X'Y'Z'*) a girar com velocidade angular $\vec{\omega}$, mas o observador O' descreve exactamente o oposto em relação ao referencial do observador O (*XYZ*), vê este a girar com velocidade angular $-\vec{\omega}$.



Vamos considerar o vector posição da partícula *A*, referido em relação ao referencial *XYZ* como $\vec{r}$, tal que:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \qquad (3.78)$$

Figura 3.17 – Movimento relativo de rotação uniforme.

e portanto a velocidade da partícula *A*, medida por O, relativa ao referencial *XYZ*, será:

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \tag{3.79}$$

Do mesmo modo podemos definir o vector posição da partícula *A*, referido em relação ao referencial *X'Y'Z'* como $\vec{r}\,'$, tal que:

$$\vec{r}\,' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'} \tag{3.80}$$

de notar que como $\vec{r}$ é igual a $\vec{r}\,'$ (a origem e o t*erminus* dos vectores posição são as mesmas respectivamente), podemos tomar $\vec{r}\,' = \vec{r}$

$$\vec{\mathrm{V}}' = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} \tag{3.81}$$

Para o observador O' o seu referencial *X'Y'Z'* não gira, mas o observador O vê *X'Y'Z'* a girar, portanto os vectores $\vec{u}_{x'}$, $\vec{u}_{y'}$ e $\vec{u}_{z'}$ não são constantes em direcção, quando visto de O, vindo portanto a derivada temporal como:

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} + \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}x' + \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}y' + \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}z' \tag{3.82}$$

e como estamos a admitir um movimento de rotação uniforme, os vectores $\vec{u}_{x'}$, $\vec{u}_{y'}$ e $\vec{u}_{z'}$ exibem um movimento uniforme, com velocidade angular $\vec{\omega}$.

$$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}_{x'} \;,\; \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}_{y'} \;,\; \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}_{z'} \tag{3.83}$$

[ver expressão (3.53)]

Então,

$$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}x' + \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}y' + \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}z' = \vec{\omega}\times\vec{u}_{x'}x' + \vec{\omega}\times\vec{u}_{y'}y' + \vec{\omega}\times\vec{u}_{z'}z' \tag{3.84}$$

$$= \vec{\omega}\times(\vec{u}_{x'}x' + \vec{u}_{y'}y' + \vec{u}_{z'}z') \tag{3.85}$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{3.86}$$

ou seja, podemos escrever;

$$\boxed{\vec{\mathrm{V}} = \vec{\mathrm{V}}' + \vec{\omega}\times\vec{r}} \tag{3.87}$$

expressão que relaciona as velocidades $\vec{\mathrm{V}}$ e $\vec{\mathrm{V}}'$ de *A*, quando observadas respectivamente de O e O', em movimento relativo de rotação.

3.5.2 Acelerações Relativas

Do mesmo modo podemos obter as relações entre as acelerações. A aceleração relativa de *A* em relação ao referencial *XYZ*, medida por O, é:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}}{\mathrm{dt}} = \frac{d\mathrm{V}_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\mathrm{V}_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\mathrm{V}_z}{dt}\vec{u}_z \tag{3.88}$$

a aceleração de *A* relativa ao referencial *X'Y'Z'*, medida por O', e':

$$\vec{a}' = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}'}{\mathrm{dt}} = \frac{d\mathrm{V}'_{x'}}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{d\mathrm{V}'_{y'}}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{d\mathrm{V}'_{z'}}{dt}\vec{u}_{z'} \tag{3.89}$$

mas a derivada em ordem ao tempo, de $\vec{\mathrm{V}} = \vec{\mathrm{V}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$ (com $\vec{\omega}$ constante), é:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}}{\mathrm{dt}} = \frac{d\vec{\mathrm{V}}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt} \tag{3.90}$$

como $\vec{\mathrm{V}}' = \mathrm{V}'_{x'}\vec{u}_{x'} + \mathrm{V}'_{y'}\vec{u}_{y'} + \mathrm{V}'_{z'}\vec{u}_{z'}$, temos que;

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}'}{\mathrm{dt}} = \frac{d\mathrm{V}'_{x'}}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{d\mathrm{V}'_{y'}}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{d\mathrm{V}'_{z'}}{dt}\vec{u}_{z'} + \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}\mathrm{V}'_{x'} + \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\mathrm{V}'_{y'} + \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}\mathrm{V}'_{z'} \tag{3.91}$$

os três primeiros termos do segundo membro são iguais a $\vec{a}'$ e os três últimos termos do segundo membro são iguais a $\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{V}}'$.

Temos portanto que:

$$\frac{d\vec{\mathrm{V}}'}{dt} = \vec{\mathrm{a}}' + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{V}}' \tag{3.92}$$

e já sabemos que $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = \vec{\mathrm{V}} = \vec{\mathrm{V}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = \vec{\omega} \times (\vec{\mathrm{V}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{V}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{3.93}$$

vindo por fim que:

$$\boxed{\vec{\mathrm{a}} = \vec{\mathrm{a}}' + 2\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{V}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} \tag{3.94}$$

Esta equação relaciona as acelerações $\vec{\mathrm{a}}$ e $\vec{\mathrm{a}}'$ da partícula A, relativas aos observadores O e O' em movimento relativo com rotação uniforme.

O termo $\boxed{2\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{V}}'}$ é chamado de ***aceleração de Coriolis*** (3.95)

O termo $\boxed{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$ é chamado de ***aceleração Centrípta*** (3.96)

Estas acelerações resultam do movimento relativo de rotação dos observadores, muito úteis na descrição de movimentos, por exemplo à superfície da Terra (que roda com movimento uniforme em torno do seu eixo de rotação).

3.5.3 Movimento Relativo à Terra

Estudo do movimento de um corpo em relação à Terra.
A velocidade angular da Terra $\omega = 7{,}2921\times10^{-5}$ rad s^{-1} , sendo a sua direcção coincidente com o eixo de rotação da Terra.

Consideremos um corpo A sobre a superfície da Terra, e tomemos g_0 a aceleração da gravidade por um observador em A, desprovido de rotação. Assim g_0 corresponde a a nas equações anteriores. a' será a aceleração medida por um observador que gira com a Terra, logo:

$$\vec{a}' = \vec{g}_0 - 2\vec{\omega}\times\vec{V} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (3.97)$$

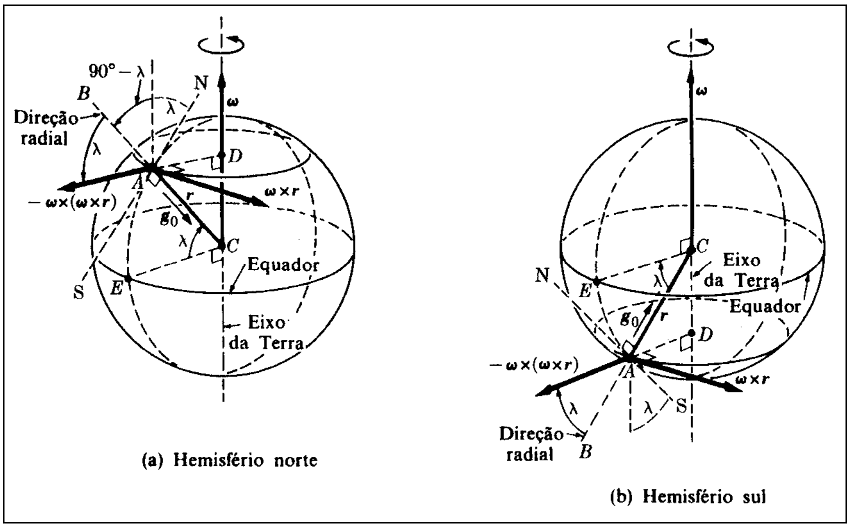


Figura 3.18 – Aceleração centrifuga devido à rotação da Terra.

Se considerar-mos o corpo A inicialmente em repouso ou movendo-se lentamente, de modo a que o termo de *Coriolis* seja desprezível em relação ao **termo centrífugo**, a aceleração medida é a chamada *aceleração gravítica efectiva*, dada por:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (3.98)$$

Esta é a aceleração medida com o pêndulo. Admitindo a Terra esférica e sem anomalias locais, g_0 aponta sempre para o centro da Terra, portanto na direcção radial.
Com este termo adicional, a direcção passa a ser a de g , chamada vertical, que é ligeiramente desviada da direcção radial.

Este termo centrífugo, como podemos ver na figura 3.18, é sempre paralelo ao plano do equador, o módulo de $\vec{\omega}\times\vec{r}$ é:

$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right| = \omega\, r \cos\lambda \qquad (3.99)$$

ou seja o módulo da aceleração centrífuga é:

$$\left|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right| = \omega^2\ r\cos\lambda = 3{,}34\times10^{-2}\cos\lambda \quad (\text{m.s}^{-2})$$

sabendo que o raio médio da Terra é 6370 km, o valor máximo desta aceleração centrífuga ocorre no equador. O seu valor é de apenas 0,3% de g_0 .

Segundo a direcção radial, teremos: $\left|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right|\cos\lambda=\omega^2\ r\cos^2\lambda$

Segundo a direcção norte-sul, teremos: $\left|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right|\sin\lambda=\omega^2\ r\cos\lambda\sin\lambda$

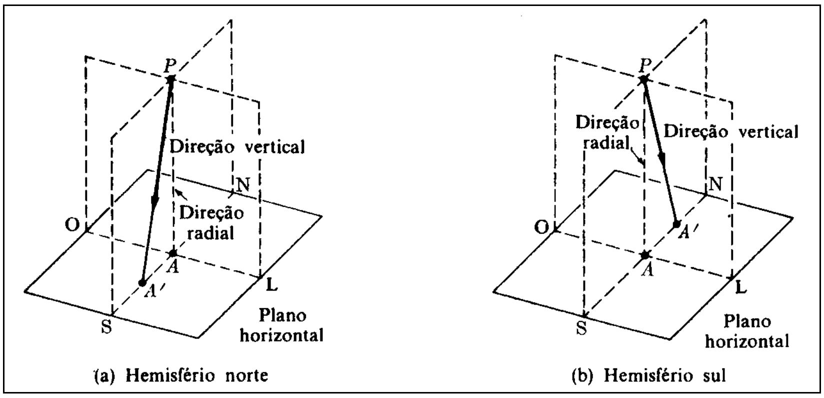


Figura 3.19 – Desvio ao longo do meridiano, na queda de um grave

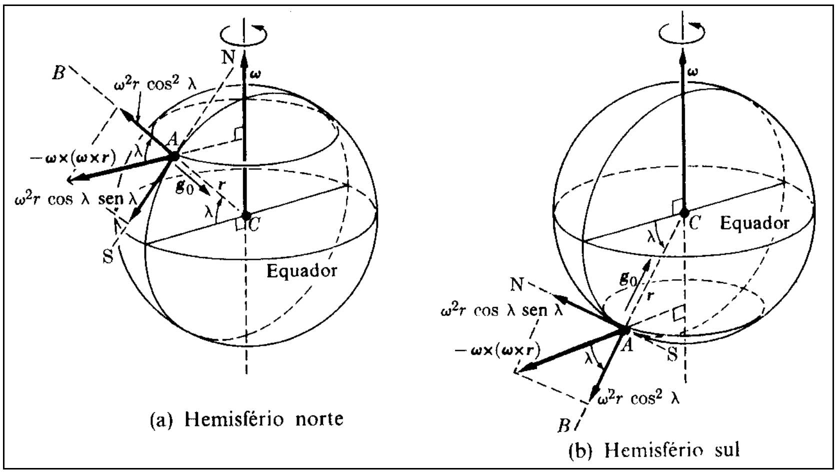


Figura 3.20 – Componente vertical e horizontal do termo centrífugo.

Em relação ao **termo de *Coriolis***, consideremos um corpo que cai em queda livre.
O valor de $-2\vec{\omega}\times\vec{V}$ está dirigido para Este, pelo que o corpo em queda atingirá o solo sempre a leste da sua vertical inicial. A combinação destes dois efeitos (*centrífugo* e de *Coriolis*) faz com que no hemisfério norte um corpo em queda livre seja desviado para sudeste, e no hemisfério sul tal desvio ocorre para nordeste.

Quando temos corpos que se movem no plano horizontal, o nosso termo de *Coriolis* tem componentes horizontais e vertical. No hemisfério norte essa componente horizontal faz com que uma trajectória inicialmente recta seja desviada para a direita, e para a esquerda se estivermos no hemisfério sul.

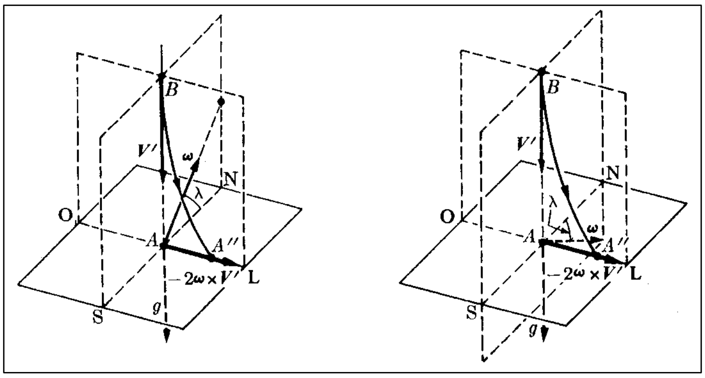


Figura 3.21 – Desvio para leste (em ambos os hemisférios) de um corpo em queda livre.

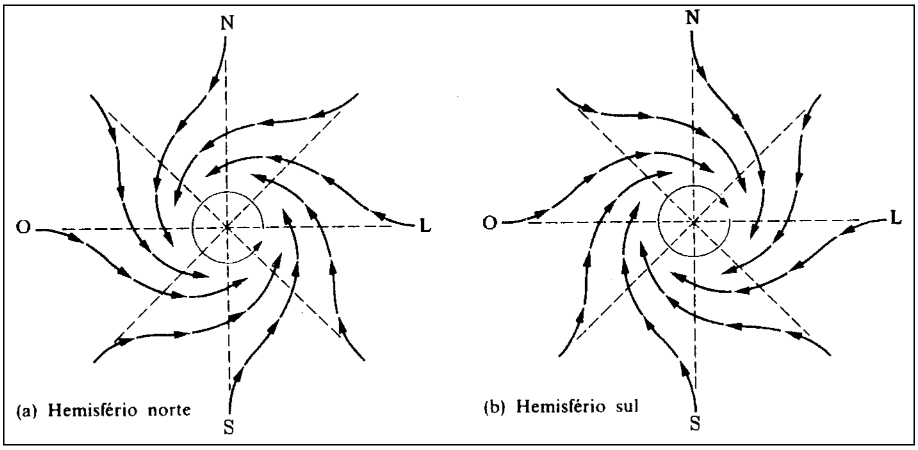


Figura 3.22 – Efeito do termo de *Coriolis* na rotação das massas de ar atmosféricas (em ambos os hemisférios).

Tabela 3.1 – Valores da aceleração da gravidade para alguns locais na Terra.

Local (nível do mar)	Latitude	Aceleração da gravidade (ms^{-2})
Pólo Norte	90º 00’	9,8321
Anchorage	61º 10’	9,8218
Greenwich	51º 29’	9,8119
Paris	48º 50’	9,8094
Tomar	39º 32’	9,8010
Washington	38º 53’	9,8011
Key West	24º 34’	9,7897
Panamá	08º 55’	9,7822
Equador	00º 00’	9,7799

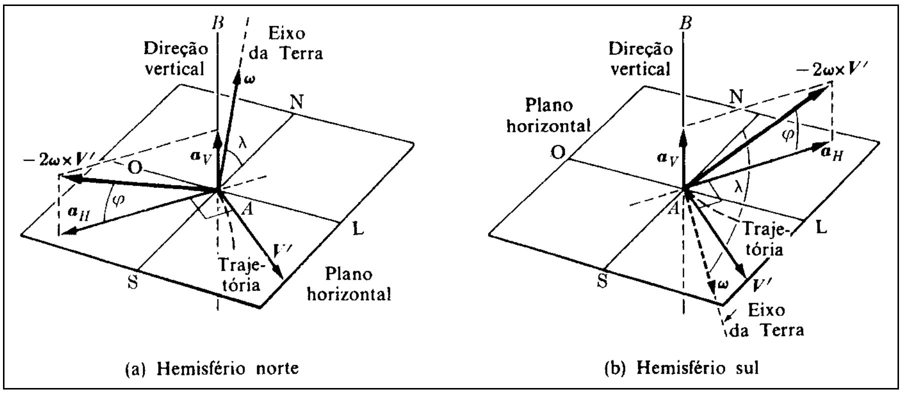


Figura 3.23 – Componente vertical e horizontal do termo de *Coriolis*, (em. ambos os hemisférios).