Capítulo 2 – Observação e medição. Seus registos

2.1 Importância da medida

Na ciência e na tecnologia, como de resto em grande parte da nossa vivência quotidiana, os objectos, as substâncias, os actos, enfim todas as "coisas", para além de poderem (e serem) qualificadas, são fundamentalmente quantificadas. Não basta simplesmente dizer que está calor ou frio, temos que numerar esse parâmetro, cuja grandeza física, no caso, é a temperatura. A sua quantificação é a indicação de uma valor, no presente exemplo, um número (escalar), relacionado com uma escala, num sistema padrão (sistema internacional, SI). Só a quantificação permite a passagem das nossas observações para o mundo da linguagem natural da Física – a Matemática. Sem isso não conseguimos cabalmente descrever e construir os modelos dos fenómenos que observamos na natureza.

Citações de Lord Kelvin (Sir William Thomson) [1824-1907], a propósito das medições:

"To measure is to know"

"If you can not measure it, you can not improve it"

"In physical science the first essential step in the direction of learning any subject is to find principles of numerical reckoning and practicable methods for measuring some quality connected with it. I often say that when you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind; it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely in your thoughts advanced to the state of Science, whatever the matter may be."
[PLA, vol. 1, "Electrical Units of Measurement", 1883-05-03]

Estas citações são tidas por todos nós, como princípios mestres e fundamentais. O mesmo não podemos dizer de outras afirmações/convicções de Lord Kelvin (nos finais do séc. XIX), tal como;

"There is nothing new to be discovered in physics now.
All that remains is more and more precise measurement."

O que nos leva a concluir, que até o mais genial do génios se engana e comete erros.

"Errare humanum est"

O mesmo se passa com a quantificação das nossas grandezas físicas. Todas as nossas medidas são afectadas, em maior ou menor porção, por erros de natureza variada. A indicação do valor de um parâmetro físico só faz sentido se for acompanhado pelo erro que o afecta.

2.2 Tipos de erros nas medições e medidas

A Física baseia-se fundamentalmente em relações entre quantidades (grandezas) mensuráveis. Contudo qualquer medida ou valor experimental tem pouco significado se não tivermos uma estimativa do erro ou incerteza a ele associado (a não ser que o valor por nós medido reflicta já a precisão com que foi medido).

Os erros associados às medidas de um qualquer parâmetro podem ser separados em duas categorias distintas:

– erros directos – associados a uma medição directa. Resultam da leitura directa de um instrumento de medida.

– erros indirectos – associados a uma medição indirecta. Baseado no cálculo de outros parâmetros, directamente medidos.

Exemplo: calculo num cubo de betão, da massa volúmica (ρ) e do seu erro ($\Delta\rho$), a partir das medições; da sua aresta (l) (e seu erro Δl) e da sua massa (m) (e seu erro Δm). As medidas do comprimento e da massa podem ser directamente obtidas, respectivamente com uma régua e balança, mas a massa volúmica terá de ser obtida por cálculo, tal como o seu erro associado.

Para efectuar as nossas medições e obter as nossas medidas, são usados instrumentos de medida (uma régua, um termómetro, uma balança, etc). As medições podem ser efectuadas por nós ou (como acontece actualmente) por sistemas sem a nossa acção directa. Em qualquer dos casos, existe sempre um erro associado à medida. No caso da intervenção humana, temos de tomar especiais cuidados na observação/medição.

2.2.1 Observação/acção humana

Para efectuar uma medição começa-se por instalar e ajustar cuidadosamente o instrumento, subtraindo-o tanto quanto possível à acção de tudo quanto possa diminuir a sua exactidão, como sejam trepidações, correntes de ar, mudanças de temperatura, etc.

È igualmente importante que o observador esteja numa posição confortável, tendo perto de si os elementos que deve observar, e ao alcance das mãos aqueles em que deve actuar. Qualquer causa inútil de fadiga vai prolongar a execução do trabalho e diminuir o rigor das medidas.

Ao fazer-se a leitura da posição de um indicador sobre uma escala (por exemplo a agulha de um multímetro analógico), o raio visual deve ser perpendicular ao plano da graduação, para evitar os chamados erros de paralaxe (de perspectiva).

Medir uma grandeza consiste em compará-la com outra da mesma espécie, tomada como termo de comparação. Vejamos então os erros associados às medições directas.

Figura 2.1 – Multímetro analógico com espelho em fita sob a escala, para obviar o efeito de paralaxe na leitura dos valores.

2.3 Cálculo dos erros em medidas directas

2.3.1 Erros sistemáticos e aleatórios (nas medições directas)

Os erros sistemáticos são devido a defeitos constantes do método empregue ou do instrumento usado (escala não calibrada, zero desajustado) ou do observador que faz a medição (accionando, por exemplo, um cronómetro sempre demasiado tarde ou cedo). São portanto erros que se produzem sempre nas mesmas condições, afectando o resultado (a medida) sempre da mesma forma (no mesmo sentido). [ver exactidão em 2.4]

Os erros acidentais ou aleatórios são devidos a causas fortuitas de que se não tem perfeito conhecimento, afectando o resultado umas vezes para mais outras vezes menos. A este género de erro podemos nós aplicar o cálculo estatístico da teoria das probabilidades. [ver precisão em 2.4]

Em relação aos erros sistemáticos, estes podem ser eliminados das medidas, uma vez descritas e conhecidas as suas causas. Para isso é necessário fazer variar as condições da experiência, o método, o observador. Os erros acidentais não podem eliminar-se, mas no entanto é possível atenuar os seus efeitos, aumentando o número de medições e medidas, avaliando assim a sua ordem de grandeza.

2.3.2 Cálculo do limite superior do erro acidental

Para o cálculo do erro de uma medida, temos de tomar em consideração a precisão com que o instrumento nos permite fazer a leitura, que é traduzida pelo erro de leitura e a dispersão dos valores obtidos nas várias medições, que se traduz no erro de observação.

Exemplo: um voltímetro digital exibe valores num ecrã com apenas três casas decimais (0,000). Na escala de volt isto significa que o erro de leitura é de 0,5 mV (0,0005 V).

2.3.3 Erro de observação

No conjunto dos resultados de sucessivas medições de uma grandeza (sob as mesmas condições), verificamos sempre uma dispersão dos valores, pondo dessa forma em evidência que todas as nossas medidas são afectadas por um certo erro.

É pois inacessível o verdadeiro valor de uma grandeza, ou seja, o seu exacto valor

Por definição - o erro é a diferença entre o valor medido e o verdadeiro valor da grandeza. Mas como este último nos é inacessível, o erro não é então rigorosamente determinado. No caso de determinações em que o número de observações (repetições) não é muito grande, não é possível aplicar uma estatística (nas condições que esta exige), de modo a determinar o erro provável. Ficamos então cingidos ao limite superior do erro, colocando-nos sempre, por princípio na situação mais desfavorável. Consideremos uma grandeza X, da qual se obtiveram n medidas X_i nas mesmas condições. Na prática adopta-se como valor da grandeza o seu valor médio, definido como:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (2.1)$$

(critério este aconselhado pela análise estatística de dados)

À diferença δ_i entre o valor de cada medida individual e o valor médio, chama-se desvio em relação ao valor médio.

$$\delta_i = X_i - \overline{X} \tag{2.2}$$

Consequentemente o somatório dos desvios deve ser nulo.

Dá-se o nome de limite superior do erro de observação (ΔX_{obs}), ao maior dos módulos dos δ_i.

O cálculo do limite superior do erro equivale a considerar como nulas as probabilidades muito pequenas do erro. Se considerarmos uma distribuição estatística do desvio, obteremos em regra, uma distribuição do tipo Gaussiano (normal). Os grandes desvios em relação à média têm uma probabilidade muito reduzida.

Se tomarmos como nulas as probabilidades muito pequenas (abaixo de P_i) isso equivale a desprezar todos os valores superiores a Δ_1 (1ª distribuição) ou a Δ_2 (2ª distribuição) da figura 2.2.

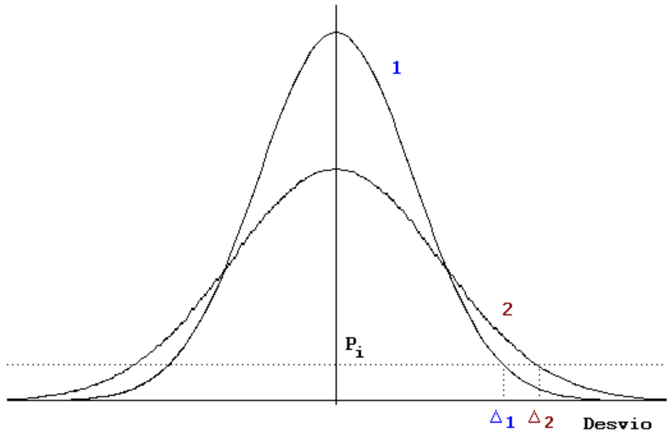

Figura 2.2 – Distribuições dos erros, com os limites superiores de erro.

Afirmaremos assim que a medida efectuada se encontra no intervalo $\overline{X}_1 \pm \Delta_1$ ou $\overline{X}_2 \pm \Delta_2$ e o limite superior do erro se considera Δ_1 ou Δ_2, consoante se trate da medida mais precisa ou menos precisa.

No caso de termos efectuado muitas leituras (n > 50) podemos tratar os resultados estatisticamente. Determina-se um <u>erro padrão</u> de observação para a média dado por:

$$\mu = \sqrt{\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + ... + (X_n - \overline{X})^2}{n(n-1)}} \tag{2.3}$$

que nos diz que a probabilidade do valor real da grandeza observada não diferir mais do que μ da média determinada é de … %. Dado o reduzido número de medidas que muitas vezes nos é possível efectuar em cada experiência, poucas vezes faremos uso desta fórmula, tomando pois como erro de observação, o limite superior do erro de observação já definido.

2.3.4 Erro de leitura

Cada medida X_i , é afectada por um erro de leitura respeitante ao instrumento utilizado na medição (que se determina *à priori*, enquanto que o erro de observação se determina *à posteriori*). Adopta-se para limite superior do erro de leitura (ΔX_{leit}), metade da menor divisão avaliável da escala (directamente ou por estimativa). Isto acontece para grande parte dos instrumentos.

Para valor do erro, ΔX, inerente à medição directa, toma-se o maior dos valores ΔX_{obs} e ΔX_{leit}, pois sendo de ocorrência independente não há que os sobrepor.

O resultado final da medição apresentar-se-á sob a forma:

$$X = \overline{X} \pm \Delta X \qquad (2.4)$$

O que significa dever o valor da grandeza estar compreendido:

$$X \in \left[\overline{X} - \Delta X, \overline{X} + \Delta X\right] \qquad (2.5)$$

Muitas vezes interessa apresentar o erro não na sua forma absoluta (ΔX) independentemente da grandeza a que diz respeito, mas em relação a ela, isto é, o erro relativo, que é dado por $\Delta X/X$. Por exemplo, as medidas 100 ± 2 cm e 10 ± 2 cm têm o mesmo erro absoluto, mas não têm o mesmo erro relativo, sendo o primeiro de 0,02 (2%) enquanto o segundo de 0,2 (20%), o que nós indica que a primeira medida é (10 vezes) mais precisa.

2.4 Precisão *versus* Exactidão

Estes adjectivos já foram aqui anteriormente empregues, sem a sua explanação. Convêm portanto descrever qual o seu concreto significado. Para tal usaremos algumas analogias, que nós são úteis nessa explicação.

A **Exactidão** (***Accuracy***) indica quão perto está o valor medido ou calculado, do valor exacto (real, verdadeiro) da grandeza em causa.

A **Precisão** (***Precision***) é também apelidada de reprodutibilidade (ou repetabilidade), indica o grau com que as medidas (directas ou indirectas) exibem o mesmo valor similar.

A precisão não tem relação directa com a exactidão. Quer isto dizer que os resultados de uma experiencia (ou cálculo) podem ser; exactos mas não precisos, precisos mas não exactos, ambos, ou nenhuns. Um sistema de medição ou computacional, é válido se é simultaneamente preciso e exacto.

Os "termos do erro" associados a estas duas situações são distintos. Para a exactidão é comum chamar enviesamento (*bias*) ou não aleatório. Para a precisão é o erro que descrevemos até agora (aleatório).

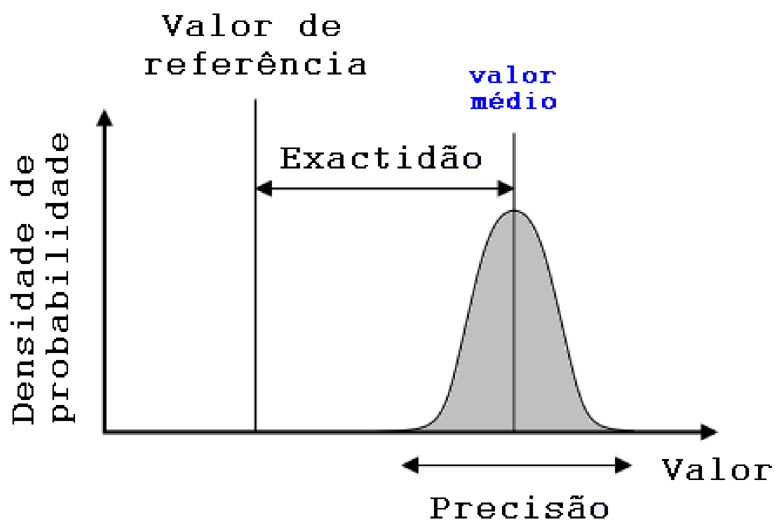

Figura 2.3 – Relação entre Precisão e Exactidão.

Exactidão é o nosso grau de veracidade da grandeza medida (ou calculada) e precisão é o nosso grau de reprodutibilidade da mesma, como exibido na figura 2.3. É usual fazer a descrição pictórica destas dois termos, recorrendo ao exemplo do tiro ao alvo (figura 2.4).

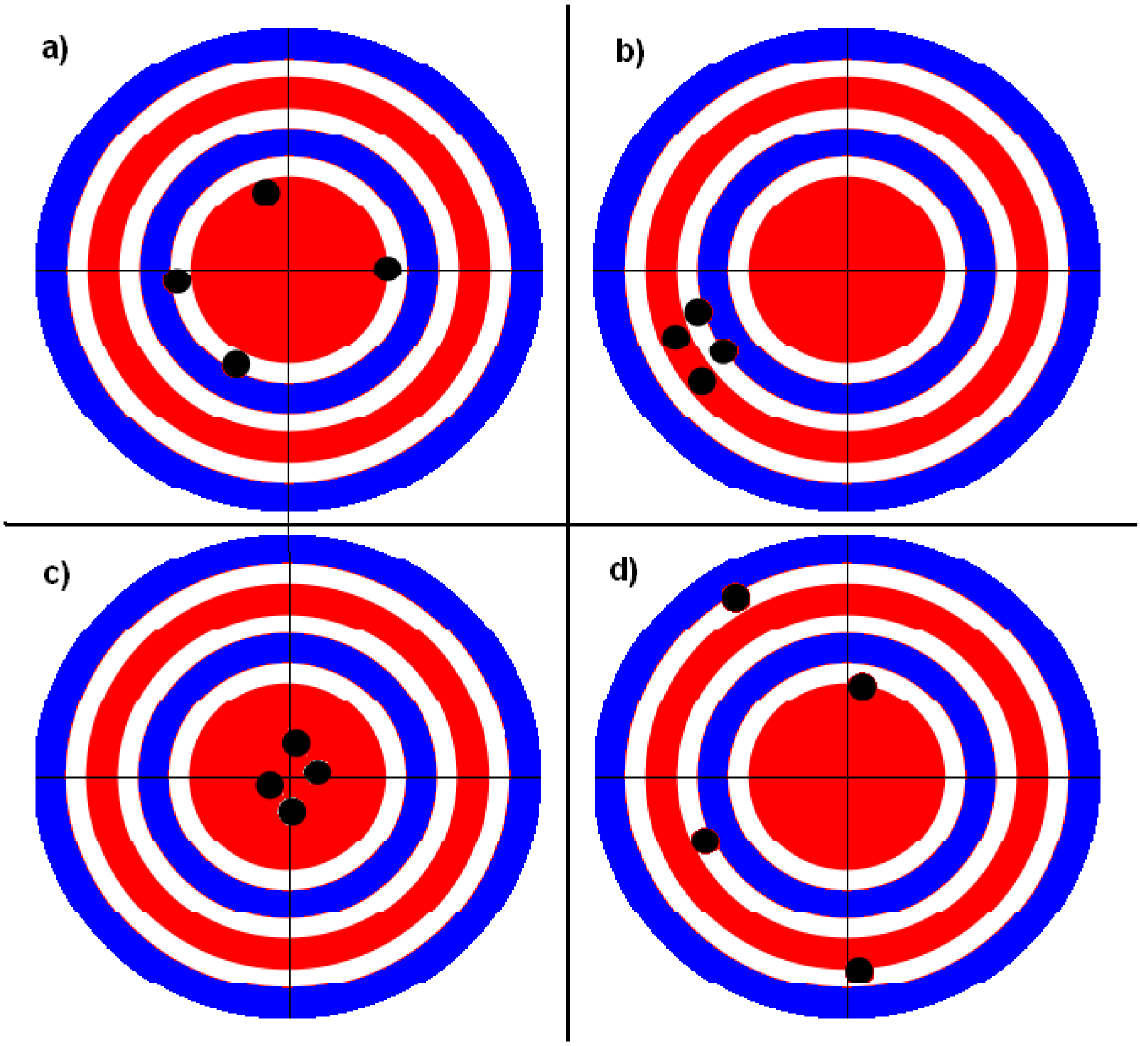

Figura 2.4 – Relação entre Precisão e Exactidão.
Situação: a) – disparos exactos mas não precisos. b) – disparos precisos mas não exactos.
c) – disparos precisos e exactos. d) – disparos nem precisos nem exactos.

2.5 Cálculo dos erros em medidas indirectas

Vimos já como estimar um erro ΔX para uma medida directa, a partir do erro de observação e do erro de leitura do instrumento. No entanto a maior parte das quantidades ou relações que pretendemos obter não são por via de leitura directa de um instrumento, mas antes calculadas a partir de valores experimentais, esses sim, medidos directamente. A relação entre as grandezas, define univocamente a que pretendemos obter. E quanto ao seu erro? Como o podemos saber?

Voltemos ao exemplo da página 15. A equação que relaciona a massa volúmica (ρ) com a aresta (l) do cubo e a sua massa (m) é a seguinte:

$$\rho = \frac{m}{l^3} \text{ (kg m}^{-3}\text{)} \qquad (2.6)$$

O erro associado à determinação da massa volúmica $\Delta\rho$, estará relacionado com os erros das medidas directas do comprimento da aresta Δl e da medição da massa deste Δm. O que pretendemos então saber é de que forma os erros Δl e Δm se propagam a $\Delta\rho$, a partir da expressão (2.6).

De um modo geral a equação de definição da grandeza *Z*, pode ser escrita como função das grandezas medidas directamente (*A, B, C,…*), como:

$$Z = f(A, B, C, ...) \tag{2.7}$$

O erro ΔZ, que vem para a grandeza *Z* pelo facto de *A* ser medido com um erro ΔA, *B* ser medido com um erro ΔB, etc, é dado pela expressão geral:

$$\boxed{(\Delta Z)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 \Delta A^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 \Delta B^2 + ...} \tag{2.8}$$

Esta expressão resulta de considerarmos que, em primeira aproximação:

$$(\Delta Z) = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\Delta A + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\Delta B + ... \tag{2.9}$$

Mas como pretendemos obter $|\Delta Z|$, convém trabalhar com os quadrados das variações e elevar-se toda a expressão ao quadrado, para obter a expressão (2.8);

$$(\Delta Z)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 (\Delta A)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 (\Delta B)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\Delta A \Delta B + ... \tag{2.10}$$

(ΔA e ΔB são aleatoriamente positivos e negativos, e dão em média zero)

O símbolo $\partial f / \partial A$ representa o valor da derivada parcial em relação a *A, B, C,* etc. A derivada parcial em relação a *A* é calculada como se a função considerada só fosse função de *A*, isto é, considerando todas as outras variáveis como constantes.

Tabela 2.1 – Erros das funções mais comuns.

Função	**Erro**
$Z = A + B + ...$ $Z = A - B - ...$	$(\Delta Z)^2 = \Delta A^2 + \Delta B^2 + ...$
$Z = A \times B$ $Z = A / B$	$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + ...$
$Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}$
$Z = kA$	$\Delta Z = k\Delta A$

Com base nestes conhecimentos, calcule então o erro $\Delta\rho$ da massa volúmica do cubo de betão, quando o valor medido do comprimento da aresta foi de l =203,5 ± 1,0 mm e o valor da sua massa m = 19256 ± 5 g.
Resposta: ρ = 2284, 9 ± 33,7 kg m^{-3}

2.6 Modelos Físico-Matemáticos

Mas qual o intuito de tais medidas, com a maior precisão e exactidão possíveis?

Como referido no 1º capítulo, a partir da observação e experimentação, são formuladas ideias e hipóteses para a explicação dos fenómenos. Essas ideias é que formam o nosso modelo, que podemos chamar de físico-matemático. Matemático porque a linguagem da Física se expressa exactamente por expressões matemáticas, alimentados pelos nossos valores (numéricos) medidos.

Um modelo físico-matemático é uma construção abstracta, virtual, que resulta do pensamento humano. Tenta explicar, simular e fundamentalmente prever o comportamento da natureza e dos fenómenos, baseado nos conhecimentos pré existentes (ou elaborando novos). Um modelo dá normalmente ênfase aos parâmetros relevantes com maior ordem de grandeza, desprezando todos os outros de menor ordem. É pois, um modelo sempre simplificado em relação à "verdadeira natureza".

Vejamos o exemplo da Lei de Ohm – a famosa lei – que relaciona a diferença de potencial eléctrico (d.d.p.) aplicada nas extremidades de uma resistência eléctrica, com a passagem da corrente eléctrica através da mesma. Em 1826, Georg Simon Ohm determinou a relação matemática entre estas duas quantidades, sendo a resistência eléctrica o factor de proporção entre elas - no modelo que conhecemos hoje como - Lei de Ohm.

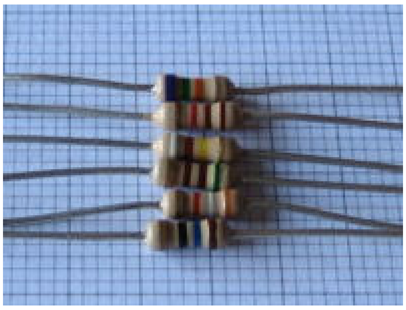

Figura 2.5 – Algumas resistências eléctricas

A equação matemática que exprime o modelo é:

$$V = RI \tag{2.11}$$

Sendo; V a d.d.p. (volt), I a intensidade de corrente (ampère) e R a resistência (ohm).

Este modelo prevê que se fizermos passar uma corrente de 1 A através de uma resistência eléctrica com 10 Ω, aos seus terminais mediremos uma d.d.p. de 10 V. Mas o modelo não introduz qualquer limitação aos valores das grandezas, nem indica como se comporta a nossa resistência com a temperatura, a pressão, a sua constituição, etc. Quando os materiais não se comportam segundo a lei de ohm, temos que ter factores de correcção, ou seja, um modelo mais aperfeiçoado e próximo da realidade, que exprima as variações com os demais parâmetros. Para grande parte das aplicações, é suficiente considerar o modelo lei de ohm para relacionar as correntes com as d.d.p.

A representação pictórica do nosso modelo, em circuito eléctrico é a indicada na figura 2.6.

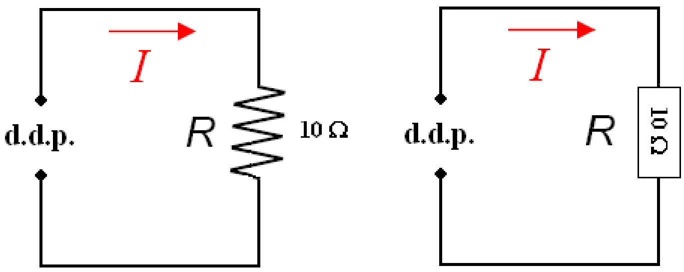

Figura 2.6 – Representação da resistência eléctrica.