Capítulo IX
Equações de *Maxwell*.
Propagação de ondas electromagnéticas

9.1 Equações de *Maxwell* e as descobertas de *Hertz*

9.1.1 As equações de *Maxwell*

As equações mais gerais de *Maxwell*, no sentido em que são válidas quer no vácuo (vazio), quer nos meios materiais, são escritas na seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon \qquad [1^a] \qquad (9.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad [2^a] \qquad (9.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad [3^a] \qquad (9.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad [4^a] \qquad (9.1d)$$

ε – permeabilidade eléctrica,
μ – permitividade magnética,
c – velocidade da radiação electromagnética

com as equações de ligação:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad (9.2a)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (9.2b)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (9.2c)$$

9.1.2 Campos Eléctrico e Magnético em conjunto

O facto fundamental de termos um campo eléctrico variável e este produzir efeitos magnéticos, e de esses efeitos magnéticos variáveis se manifestarem como efeitos eléctricos – mesmo no espaço vazio (interior do condensador, por exemplo) onde não existem nem distribuições de carga (fonte de $\vec{E}$) nem de corrente (fonte de $\vec{B}$) – levou *Maxwell* a prever a existência de uma **onda eléctrica e magnética** a propagar-se no espaço.

Por exemplo, se num condensador colocado no vazio, tivermos um campo eléctrico E que varia sinusoidalmente (normal às suas armaduras), com uma intensidade;

$$E = E_0 sen(\omega t)$$

e teremos a ele associado o campo de indução magnética B, também sinusoidal com a mesma frequência, dado por;

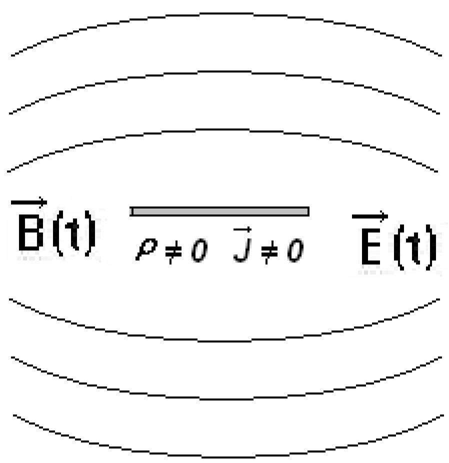
$$B = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c_0^2} r E_0 \cos(\omega t)$$

A *forma* relativa do campo eléctrico e magnético mantêm-se, mas no decorrer do tempo – estes propagam-se no espaço, com uma determinada velocidade de propagação, relacionada com as constantes ε_0 e μ_0, da seguinte forma;

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c_0^2}} \qquad (9.3)$$

Verificamos que o produto das constantes ε_0 e μ_0 representam também uma constante da natureza – o inverso do quadrado da velocidade de propagação da onda electromagnética no vazio – c_0. Este valor é igual à **velocidade de propagação da luz**.

9.1.3 Onda Electromagnética no vazio



Pensemos que temos fontes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, cargas eléctricas e correntes livres, respectivamente. Na ausência de meios materiais (vazio), quais as soluções das equações de *Maxwell* para esses campos, devido a essas fontes (figura 9.1)?

Fora das regiões onde se localizam as fontes, teremos então:

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \vec{J} = 0$$

Figura 9.1 – Propagação de onda electromagnética no vazio.

Se aplicarmos o operador rotacional ($\vec{\nabla}\times$) à 2ª (9.1b) e 4ª (9.1d) equação de *Maxwell*, e usarmos as restantes equações (9.1a e 9.1c), obtemos as seguintes relações;

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad (9.4a)$$

e

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad (9.4b)$$

Mas sabemos que $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$ é igual a $\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{A}-\vec{\nabla}^2\vec{A}$ [(rot(rot *A*) = grad (div(*A*)) – lap(*A*)] o que significa imediatamente o seguinte:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{E}=-\vec{\nabla}^2\vec{E} \qquad (9.5a)$$

pois $\rho=0$ e

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{B}=-\vec{\nabla}^2\vec{B} \qquad (9.5b)$$

pois $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

Igualando agora as expressões (9.4a) a (9.5a) e (9.4b) a (9.5b) respectivamente, obtemos as seguintes equações:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad (9.6a)$$

e

$$\vec{\nabla}^2\vec{B}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0 \qquad (9.6a)$$

Estas equações são formalmente iguais para ambos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e são equações de propagação de onda (*equações de onda*), cujas soluções são ondas que se propagam com uma velocidade c_0.

São equações do tipo;

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{\Phi}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{\Phi}}{\partial t^2}=0} \qquad (9.7)$$

em que $\vec{\Phi}$ representa tanto o campo $\vec{E}$ como o campo $\vec{B}$. A equação (9.7) é uma equação diferencial envolvendo a dependência temporal e espacial da grandeza $\vec{\Phi}$(*x,y,z,t*), ($\vec{E}$ ou $\vec{B}$) e uma propagação com velocidade *v*.

A solução desta equação geral (9.7) irá depender das condições consideradas.

9.1.4 Onda plana electromagnética

Um caso muito importante e particular é o de considerarmos *ondas planas* que se propagam (por exemplo) na direcção do eixo z, $\Phi(x,y,z,t) = \Phi(z,t)$. É o caso das ondas que recebemos das longínquas fontes luminosas das estrelas.

$$\frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2}$$

a solução será da forma:

$$\Phi(z,t) = f_-(z - ct) + f_+(z + ct)$$

onde f_- e f_+ são funções arbitrárias dos respectivos argumentos. A função f_- representa uma ***onda progressiva*** que se propaga no sentido positivo do eixo z e a função f_+ uma onda que se propaga no sentido negativo do eixo z, **onda regressiva**. Qualquer combinação linear destas soluções ainda é uma solução.

9.1.4.1 Onda electromagnética plana e linearmente polarizada

Se fixarmos a direcção (z) de propagação, e verificarmos que a direcção do campo eléctrico $\vec{E}$ é sempre constante (digamos no eixo x);

$$\vec{E} = E_x(z,t)\vec{u}_x$$

Estamos perante um campo (eléctrico) que só tem variação ao longo dessa direcção (sendo nulo nas outras direcções). Quando isto ocorre, dizemos que temos uma onda plana linearmente polarizada (na direcção de eixo x).

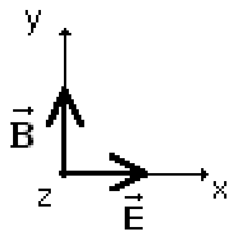


Figura 9.2 – Onda electromagnética plana linearmente polarizada.

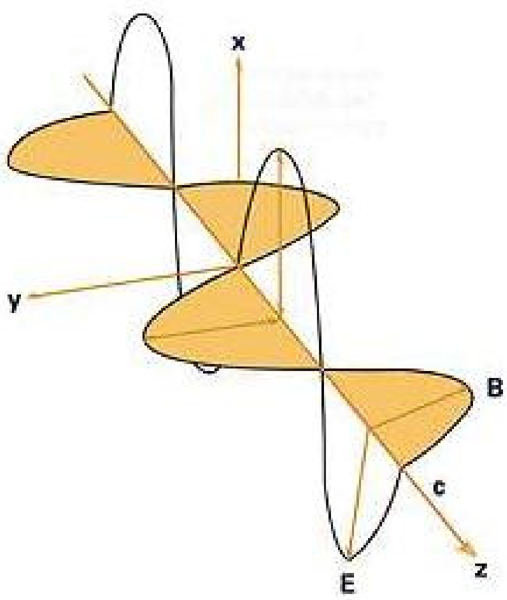
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

e verificamos que $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{u}_y$ é também linearmente polarizado.

O campo eléctrico $\vec{E}$ e o campo de indução magnética $\vec{B}$ são perpendiculares entre si e perpendiculares à direcção de propagação (z), figura 9.2.

A onda electromagnética é transversal

Se considerarmos que a onda linearmente polarizada, tem uma dependência *espaço-temporal* bem definida, do tipo sinusoidal;



$$E_x = E_{0x}\cos(kz - \omega t)$$

e

$$B_y = \frac{E_{0x}}{c_0}\cos(kz - \omega t) = \frac{E_x}{c_0}$$

$$\mu_0 H_y = B_y = \frac{E_x}{c} \qquad (9.8)$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = c_0$$

Figura 9.3 – Representação dos campos *E* e *B* de uma onda electromagnética plana, linearmente polarizada e sinusoidal.

Existe uma relação constante entre as componentes $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Além de serem **ortogonais**, essas componentes estão também **em fase entre si**.

9.1.5 Propriedades da onda electromagnética

Podemos em seguida sumarizar as suas propriedades:

1. as equações de *Maxwell* têm solução ondulatória, obedecendo ambos os campos, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ a essa mesma equação de onda,
2. as ondas electromagnéticas propagam-se no vazio com a velocidade da luz, $c_0 = 299.792.458 \pm 1{,}2\ \mathrm{ms}^{-1}$
3. os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares entre si e perpendiculares à direcção de propagação – **onda transversal**,
4. os módulo de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ no vazio, estão relacionados por; $E/B = c_0$,
5. as ondas electromagnéticas obedecem ao princípio da sobreposição.

Exercício 9.1

Considere uma onda electromagnética plana e sinusoidal no vazio, com as seguintes características: $f = 40$ MHz, $E_0 = 750\ \mathrm{NC}^{-1}$.
Calcule o comprimento de onda (λ) , período (T) e B_0?

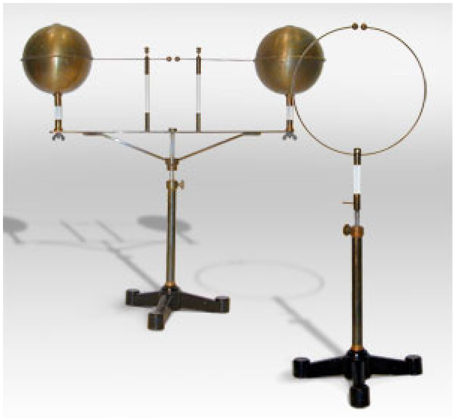
9.1.6 Descoberta experimental das ondas electromagnéticas - *Hertz*

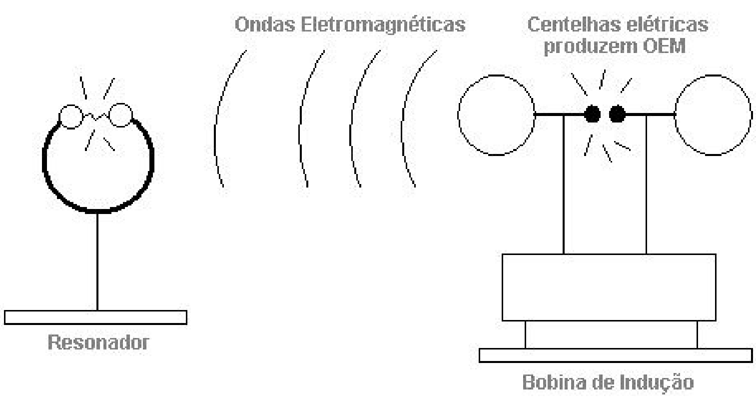
A formulação e sintetização das equações de *Maxwell* (em 1864-65)[1] possibilitaram a este, a dedução teórica da existência de uma propagação dos campos eléctricos e magnéticos – a onda electromagnética. O simples facto dos valores das constantes envolvidas na velocidade de propagação dessa onda electromagnética, resultarem num valor de velocidade, próximo da conhecida velocidade da luz, pesaram para que *Maxwell* se convencesse que efectivamente os campos eléctricos e magnéticos oscilantes produziam ondas electromagnéticas. A partir de dados experimentais, a velocidade por *Maxwell* obtida foi de 310.740.000 ms^{-1}, efectivamente não muito diferente da actual velocidade da luz no vazio.

Em 1865, *Maxwell* escreveu:

"Esta velocidade é tão próxima da velocidade da luz que parece que temos fortes motivos para concluir que a luz em si (incluindo calor radiante, e outras radiações do tipo) é uma perturbação electromagnética na forma de ondas propagadas através do campo electromagnético de acordo com as leis electromagnéticas."

Em 1878, *David Hughes* mostrou que sua balança de indução provocava ruídos num telefone construído em casa por ele. Há época, esta descoberta foi considerada como um efeito de indução de correntes. Será *Hertz*[2] que a partir de 1883, nas suas experiências com equipamentos e instrumentos por si idealizados e construídos, irá descobrir a produção e propagação das ondas electromagnéticas (ondas de rádio). Obtém igualmente formas de controlar a frequência das ondas produzidas. Todas estas experiências, entre esse ano de 1883 e o ano de 1888, permitem-lhe demonstrar a existência de radiação electromagnética, tal como previsto teoricamente por *Maxwell* (figura 9.4a e 9.4b). *Hertz* descobre que a velocidade de propagação é igual à velocidade da luz no vácuo e que têm comportamento semelhante ao da luz. Demonstrou também a refracção, reflexão e a polarização dessas ondas. Quando em 1888, apresenta os seus resultados experimentais à comunidade científica, estes são calorosamente recebidos e são efectivamente um marco na explicação quantitativa da luz como onda electromagnética e uma prova inequívoca da sua existência. É justamente considerado um dos grandes triunfos da Física.





a) b)

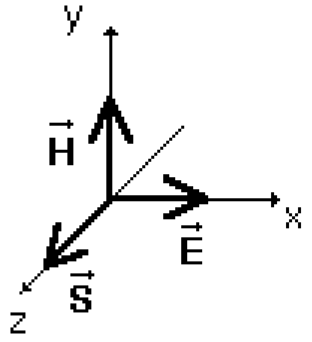
Figura 9.4 – Emissor e receptor de ondas electromagnéticas (*Hertz*, 1888).

[1] A nossa habitual formulação matemática (moderna) das equações de *Maxwell*, foi introduzida por *Oliver Heaviside* e *Willard Gibbs*, em 1884.
[2] *Heinrich Rudolf Hertz* (1857-1894) – Físico alemão que demonstrou experimentalmente a existência das ondas electromagnéticas.

9.2 Radiação electromagnética e matéria

9.2.1 Vector de *Poynting*

Para caracterizar matemática e fisicamente a onda electromagnética, podemos definir a seguinte grandeza, chamada vector de *Poynting*, como;



$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \tag{9.9}$$

Este vector tem a direcção e o sentido da propagação da onda electromagnética e dimensões de energia por unidade de tempo e por unidade de área, ou seja, potência por unidade de área, (no Sistema Internacional, $Js^{-1}m^{-2}$ ou Wm^{-2}), figura 9.5.

Figura 9.5 – Vector de *Poynting*.

9.2.2 Energia da onda electromagnética

O seu módulo representa a **intensidade instantânea da energia electromagnética**.
Valor instantâneo de S ;

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{cB^2}{\mu_0} \tag{9.10}$$

atendendo à expressão (9.8).

Consideremos agora um meio material de comportamento linear, homogéneo e isotrópico, onde se verifica então que;

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \text{e} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

com ε e μ propriedades electromagnéticas caracterizadoras do material.

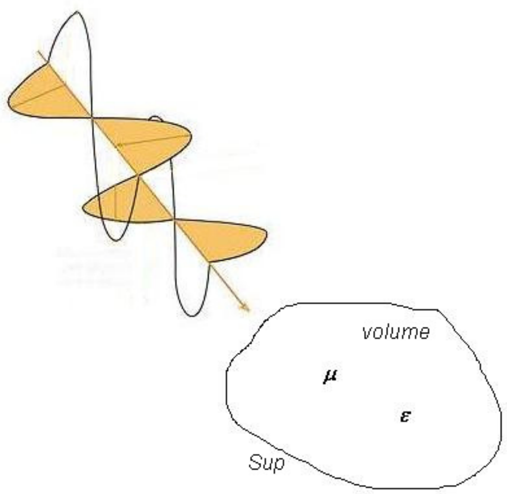


Figura 9.6 – Onda incidente num volume material.

Aplicando o operador divergência ($\vec{\nabla}\cdot$) ao vector de *Poynting*, temos;

$$\nabla\cdot\vec{S}=\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}) \qquad (9.11)$$

e sabemos que no meio material; $\nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ e $\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{J}_c$ da aplicação das equações de *Maxwell* (9.1b e 9.1d).

Substituindo estas ultimas em (9.11), temos;

$$\nabla\cdot\vec{S}=-\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\vec{J}_c \qquad (9.12)$$

Se integrando agora a expressão anterior (9.12) num volume *v* (figura 9.6), onde a onda poderá estar a entrar ou a sair, temos;

$$\iiint_v(\nabla\cdot\vec{S})dv=-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mu\iiint_v H^2dv+\frac{1}{2}\varepsilon\iiint_v E^2dv\right]-\iiint_v(\vec{E}\cdot\vec{J}_c)dv \qquad (9.13)$$

Aplicando o teorema de *Gauss* ao primeiro membro, e sabendo que as energias armazenadas nos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$, são;

$$U_E=\frac{1}{2}\varepsilon\iiint_v E^2dv \qquad (9.14a)$$

$$U_H=\frac{1}{2}\mu\iiint_v H^2dv \qquad (9.14b)$$

temos na forma integral e diferencial;

$$\frac{d}{dt}(U_E+U_H)+\oiint_{Sup}\vec{S}\cdot\vec{ds}=-\iiint_v(\vec{E}\cdot\vec{J}_c)dv \qquad (9.15a)$$

$$\frac{\partial U_{EM}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=-\vec{E}\cdot\vec{J}_c \qquad (9.15b)$$

Significado físico: o fluxo do vector de *Poynting* representa a energia que entra, por unidade de tempo, no volume *v*. Essa energia corresponde à variação temporal de energia armazenada no campo electromagnético no volume *v*, mais a energia dissipada por efeito de *Joule*, por unidade de tempo, no mesmo volume.

A densidade de energia eléctrica é igual à densidade de energia magnética,

$u_E=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2$ e $u_M=\dfrac{1}{2}\mu_0H^2=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2$ atendendo à expressão (9.8)

$$\boxed{u_{EM}=\varepsilon_0E^2} \qquad (9.16)$$

9.2.3 Valor médio do vector de *Poynting*

Consideremos ainda a onda electromagnética sinusoidal plana linearmente polarizada, e fixemo-nos num ponto do espaço ($z = z_0$) para determinar o valor médio no tempo do vector de *Poynting*.

Esse valor médio no tempo é então dado por:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \vec{S}dt \tag{9.17}$$

onde T é o período da onda electromagnética.

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = EH\,\vec{u}_z = \frac{E^2}{c\mu_0}\vec{u}_z = c\varepsilon_0 E^2\vec{u}_z = u_{EM}c\,\vec{u}_z \tag{9.18}$$

(segundo os eixos representados na figura 9.5)

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = c\varepsilon_0\frac{1}{T}\int_t^{t+T} E^2dt\,\vec{u}_z = c\varepsilon_0\frac{1}{T}E_0^2\int_t^{t+T}\cos^2(kz_0-\omega t)dt\,\vec{u}_z \tag{9.19}$$

Sabendo que o valor do integral (no intervalo de tempo de um período T) é igual a $T/2$, e usando o valor eficaz, $E_{ef} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$, obtemos;

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = c\varepsilon_0\frac{E_0^2}{2}\vec{u}_z = c\varepsilon_0 E_{ef}^2\vec{u}_z = \frac{1}{c\mu_0}E_{ef}^2\vec{u}_z \tag{9.20}$$

Existem duas razões para se usar e preferir o vector $\vec{H}$ em vez de $\vec{B}$, quando se estudam ondas electromagnéticas. A primeira é devida ao facto de $\vec{E}\times\vec{H}$ ser uma densidade de fluxo de energia (energia × velocidade). A segunda é que a razão *E/H* tem as dimensões de uma impedância. De facto, a expressão (9.8) pode ser reescrita na forma:

$$Z_c = \frac{E}{H} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 376{,}73\,\Omega \tag{9.21}$$

valor este designado por ***impedância característica do vazio***.

9.2.4 Emissão e recepção de radiação electromagnética

Podemos assim construir circuitos osciladores destinados exclusivamente à emissão/recepção de campos electromagnéticos (ondas electromagnéticas). Se de alguma forma "codificarmos" um sinal (informação, em FM ou AM, por exemplo) nesses campos ($\vec{E}$ e $\vec{H}$), podemos então transmiti-lo sem um suporte material (fios de cobre, por exemplo), através do vazio, do ar ou de meios materiais. As primeiras emissões ficaram assim conhecidas por "telegrafia sem fios" – TSF. A essência desta emissão reside nos campos eléctricos e magnéticos oscilantes, resultantes da aplicação de um sinal em frequência, na antena, figuras 9.7 e 9.8.

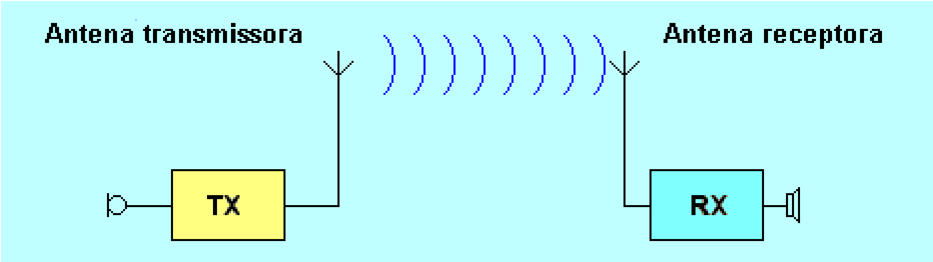


Figura 9.7 – Emissão e recepção de ondas electromagnéticas;
TX: grande potência emissora, RX: amplificador da fraca potência recebida

Associado à frequência de oscilação (*f*) está obviamente ligado o comprimento de onda da emissão (λ), pela expressão (9.22). Por questões práticas de rendimento, as antenas emissoras têm habitualmente um comprimento que é ½ ou ¼ do comprimento de onda da emissão. Os circuitos receptores são construídos de forma a seleccionar apenas determinadas frequências electromagnéticos.

$$\lambda f = c \tag{9.22}$$

A velocidade de propagação das ondas electromagnéticas (velocidade da luz), é a maior velocidade de propagação de um sinal na natureza.

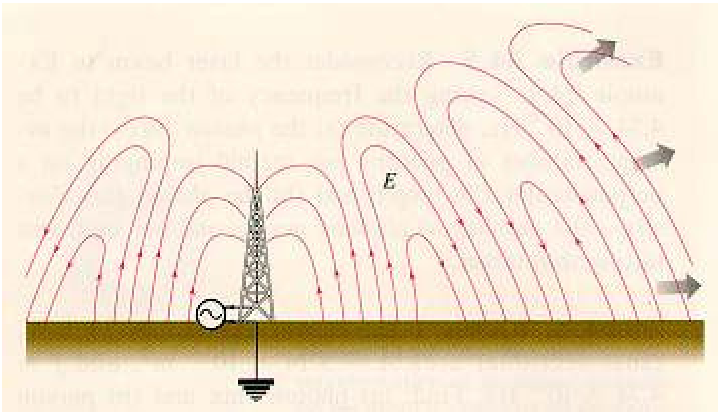


Figura 9.8 – Emissão de onda electromagnética, antena vertical (¼ λ).

9.2.5 Radiação electromagnética

Praticamente toda a "informação" que nos recebemos da natureza ocorre sobre a forma de ondas electromagnéticas. Detectamos a presença de um corpo ou fenómeno através da energia electromagnética que dele captamos. A interacção dos seres vivos com o meio envolvente também ocorre na sua maioria com recursos a "sensores" de radiação electromagnética, como sejam através dos órgãos da visão – os olhos.

A partir das descobertas de *Maxwell*, demonstrou-se que a radiação electromagnética tem exactamente o mesmo comportamento que a luz; sofre reflexão, refracção, difracção, interferência, polarização. A luz é apenas um tipo de radiação electromagnética, a que os nossos olhos humanos (e de grande parte dos seres do reino animal) são sensíveis.

Sabemos hoje que:

Todo e qualquer corpo com temperatura acima do 0 K (-273,15 °C) emite radiação electromagnética

- Mas de que forma o faz? Depende da sua temperatura?

As primeiras descobertas no séc. XVII, mostraram e provaram que a **emissão é independente do tipo de corpo** (material, forma, etc), mas **dependem efectivamente da temperatura**. A **cor** e a **emissão de luz** (radiação) **dependem da temperatura**.

Consideremos um corpo em equilíbrio com a radiação. A energia que, por segundo, ele emite será descrita por K. Se seleccionarmos agora a energia num intervalo de frequências compreendidas entre f e $f+df$, a energia será reescrita por K_f , por unidade de intervalo de frequência. A densidade *espectral* de energia u_f electromagnética (energia por unidade de volume, com frequências entre f e $f+df$, e por unidade de intervalo de frequência) é:

$$u_f = \frac{8\pi}{c_0} K_f \qquad (9.23)$$

Mas como determinar a função K_f ao longo de todo o domínio do espectro electromagnético?

Para obter a resposta, foi teoricamente necessário introduzir o conceito de Corpo Negro.

9.2.6 Corpo Negro

Um **corpo negro** é um corpo que transforma em calor (energia) toda a radiação electromagnética que nele incide. A melhor aproximação é uma *cavidade negra*, figura 9.9. É na pratica um corpo com uma cavidade interna, acessível apenas por um minúsculo orifício, por onde é emitida radiação para o seu interior.

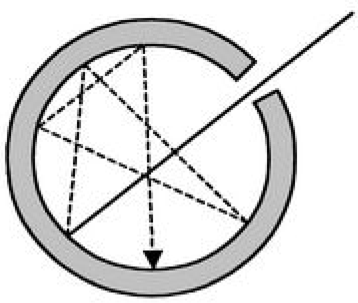


Figura 9.9 – Cavidade negra.

As experiências realizadas por *John Tyndall*, em 1865, em fios de platina, a duas temperaturas distintas; 1200 °C e 525 °C, mostraram que a razão de emissão de radiação era 11,7 vezes superior na maior temperatura (comparativamente com a temperatura menor).

$$\frac{(1200+273)^4}{(525+273)^4} = 11,61$$

A relação que satisfaz esta observação é conhecida como lei de *Stefan-Boltzmann*.

9.2.7 Lei de *Stefan-Boltzmann* (1879-1884)

$$\boxed{U = \sigma T^4 \ \ (\mathrm{Wm^{-2}})} \tag{9.24}$$

com σ = 5,6704×10^{-8} W m^{-2} K^{-4} (constante de *Stefan-Boltzmann*)

A lei de *Stefan-Boltzmann* não nos detalha a emissão de energia ao longo do espectro electromagnético (continuo de frequências da radiação), mas dá-nos antes **o total (integral) da energia**.

9.2.8 Lei do deslocamento de *Wien* (1893)

$$\boxed{\lambda_{\max} T = 2{,}897 \times 10^{-3}\ (\mathrm{mK})} \tag{9.25}$$

Com esta lei, deduzida por *Wilhelm Wien*, ainda não temos a forma da distribuição da energia ao longo do espectro electromagnético, mas já sabemos o **comprimento de onda da radiação (λ_{max})** , – a que corresponde o máximo de emissão do corpo – e a sua **relação com a temperatura**.

O que verificamos é um *deslocamento* do comprimento de onda máximo, que é inversamente proporcional à temperatura. Corpos a temperaturas mais elevadas, emitem mais energia e o comprimento de onda do máximo de emissão é tanto menor quanto maior for a sua temperatura, figura 9.10.

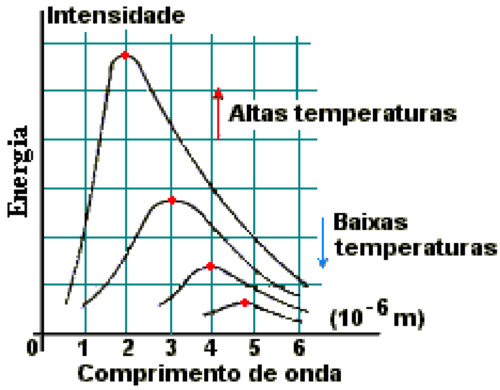


Figura 9.10 – Deslocamento de λ_{max} com a temperatura do corpo.

A melhor aproximação que *Wien* conseguiu (9.26), provou-se não ser verdadeira quando a tecnologia permitiu analisar radiação nos comprimentos de onda correspondentes ao ultravioleta e infravermelhos.

$$u_f(T) = \frac{8\pi b f^3}{c_0^3} e^{\left(-\frac{af}{T}\right)} \tag{9.26}$$

Exercício 9.2

Qual o λ_{max} de emissão de radiação electromagnética da Terra (300 K) e do Sol (5800 K)?

9.2.9 Lei de *Planck* (1900)

Max Planck, introduz uma hipótese meramente matemática – **a da energia não ser trocada em qualquer quantidade** – mas sim em pacote múltiplos de uma quantidade elementar – **quantificação da energia**. Essa hipótese revelou-se ter uma realidade física e responde perfeitamente às nossas observações.

$$\boxed{u_f(f,T) = \frac{8\pi h f^3}{c_0^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}} \qquad (9.27)$$

$h = 6{,}6261\times10^{-34}$ J s (constante de *Planck*) , $k = 1{,}3807\times10^{-23}$ J K^{-1} (constante de *Boltzmann*)

A lei de *Planck* quantifica a quantidade de energia, para qualquer temperatura, ao longo de todo o espectro electromagnético de radiação. Conseguimos assim saber, qual é a energia que um corpo emite numa dada frequência (ou comprimento de onda), quando se encontra a uma determinada temperatura. A expressão gráfica da lei de *Planck* (9.27), está retratada na figura 9.11 (para três temperaturas distintas) e na figura 9.12 (temperatura da fotosfera solar).

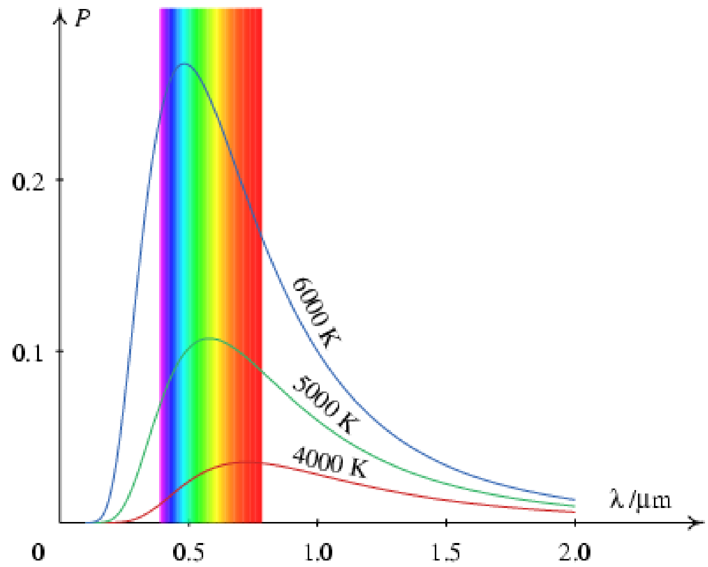


Figura 9.11 – Curvas de corpo negro (lei de *Planck*) para três temperaturas, com indicação do espectro visível.

Na figura 9.11 o gráfico indica a potência *P* relativa (*versus* comprimento de onda), e no gráfico da figura 9.12 a energia relativa (*versus* comprimento de onda).

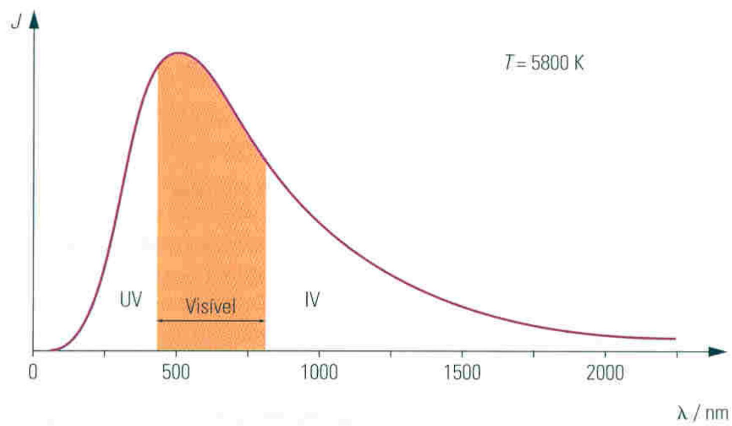


Figura 9.12 – Curvas de corpo negro (lei de *Planck*) para o Sol.

9.2.10 Espectro de frequência da radiação electromagnética

O espectro electromagnético compreende as ondas electromagnéticas (radiação electromagnética), desde baixas frequências (grandes comprimentos de onda) até elevadas frequências (pequenos comprimentos de onda), e relacionados pela expressão (9.22), figura 9.13.

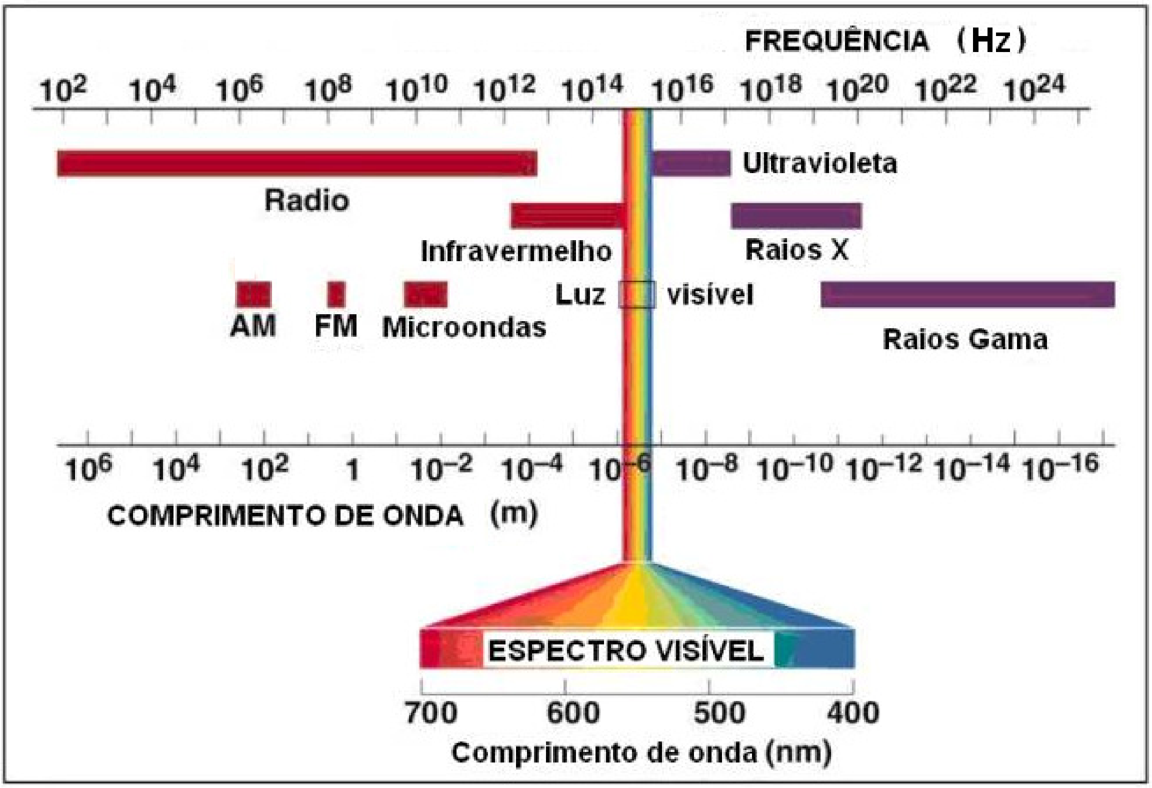


Figura 9.13 – Espectro de frequências electromagnéticas e suas denominações.

Um *quanto* de energia (fotão) tem uma quantidade de energia dada por;

$$\boxed{u = hf = h\frac{c_0}{\lambda}} \qquad (9.28)$$

Quanto maior for a frequência da radiação, maior é a energia transportada pelo *quanto*.

Exercício 9.3

Calcule a energia de um fotão azul e de um fotão vermelho?