

## ELECTROMAGNETISMO

### Curso de Electrotecnia e de Computadores

1º Ano – 2º Semestre

2010-2011

## Capítulo VII – Campo Magnético e suas fontes

### 7.1 Efeitos magnéticos na natureza

#### 7.1.1 Breve introdução histórica

As observações e descrições de efeitos magnéticos são tão antigas como as relativas aos efeitos eléctricos. Há mais de dois mil anos atrás, os Gregos antigos já conheciam as pedras "especiais" que tinham a capacidade de atrair ferro (figura 7.1). A primeira referência conhecida é a do filósofo *Tales* no século VI a.C. A composição desta pedra especial é um óxido de ferro, um mineral chamado **magnetite**, e um dos locais onde se podia encontrar tais pedras era perto da cidade de Magnésia (cidade Grega na Ásia Menor) – que deu origem às palavras "magnético", "magnetismo", etc.

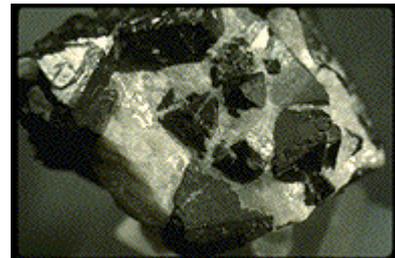


Figura 7.1 – Magnetite.

Mas há cerca de dois mil anos atrás, os chineses tinham também conhecimento das propriedades destas pedras, descobrindo que uma pedra "magnetizada" e pendurada por um fio tinha a tendência de apontar sempre ao longo da linha norte-sul (figura 7.2). Tinham assim desenvolvido a bússola! Registos das primeiras aplicações de magnetes são raros. Embora a bússola tenha aparecido primeiro na China e só depois na Europa, não está comprovada que essa tecnologia tenha daí sido importada, sendo antes um desenvolvimento próprio. O primeiro registo escrito da bússola na Europa data de 1187 d.C. e antecede em 100 anos os primeiros registos muçulmanos.



Figura 7.2 – Antiga bússola chinesa.

Em 1269, o francês *Pierre Maricourt* escreve na sua famosa “Epistola de Magnete”, experiências num ímã natural esférico, mostrando que as orientações de uma agulha magnetizada na sua superfície são curvas ao longo desta que se cruzam em dois pontos diametralmente opostos – os seus pólos (norte e sul).

No início do renascimento, em 1600, *William Gilbert*<sup>1</sup> publica “*De Magnete*”, obra dedicado à descrição destes fenómenos, sugerindo nela que a própria Terra se comportaria com um ímã natural.

<sup>1</sup> William Gilbert (1544-1603) – médico e cientista Inglês. Estudou a electricidade e o magnetismo.

### 7.1.2 Início do estudo científico do magnetismo

O livro de *W. Gilbert* (figura 7.3) apareceu numa altura de ideias revolucionárias na Europa, ao mesmo tempo que as obras de *Copérnico*, *Kepler* e de *Galileu* e de, e antes das obras de *Newton*. *Gilbert* registou muitas das ideias vigentes na época acerca do magnetismo, mas não se limitou simplesmente a isso. Ele anotou observações experimentais, e tentou explicar estes factos com base em justificações lógicas. Por este motivo, pode-se dizer que "*De Magnete*" foi o primeiro livro científico na área de magnetismo. Para explicar o funcionamento da bússola, *Gilbert* propôs que a própria Terra seria um gigantesco magnete, que atraía a bússola, a *terrella* (figura 7.4). Já era conhecido que a bússola não apontava exactamente



Figura 7.3 – *William Gilbert*.

para o pólo norte (como definido pelo eixo de rotação da terra). Os marinheiros observaram que este desvio dependia da localização do observador na Terra. *Gilbert* propôs que a zona de mar atrai menos que a zona de terra, provocando o desvio da bússola para o continente mais próximo.

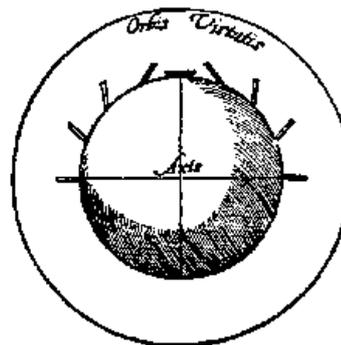


Figura 7.4 – *Terrella* de *W. Gilbert*.

Sem equipamentos adequados, o estudo e desenvolvimento do magnetismo terá de aguardar mais uns séculos, até se afirmar plenamente. Em 1687, *Isaac Newton*, publica e demonstra que a interação gravítica segue uma lei do inverso do quadrado da distância. Em 1750, o cientista inglês *John Michell* (1724-1793), recorrendo a uma balança de torção, mostra que as forças atractivas e repulsivas dos pólos magnéticos variam também com o inverso do quadrado da distância. A diferença observada é que não se consegue uma separação desses pólos, como acontece com as cargas eléctricas (em positivas e negativas). Cerca de 100 anos mais tarde, em 1787, *Coulomb* demonstra que a “mesma lei” se aplica também à força de interação eléctrica. Concluiu-se assim que as três forças obedecem à “mesma lei fundamental” de variação em função da distância.

Durante todos estes séculos, o estudo dos fenómenos magnéticos esteve simplesmente restrito aos imãs e materiais magnetizados. Nenhuma conexão tinha sido encontrada entre os fenómenos eléctricos e magnéticos. Em 1819-20, um cientista dinamarquês, *Oersted*, estava a demonstrar a passagem de uma corrente eléctrica por um fio quando observou que a corrente causou um desvio numa bússola. Obtém assim a primeira ligação experimental entre a corrente eléctrica e o magnetismo. Doze anos mais tarde, um cientista que tinha começado a sua vida como um rapaz de origens humildes e que foi inicialmente um ajudante de livraria e "técnico" de laboratório, desenvolveu esta ligação numa série de experiências fundamentais para o crescimento e desenvolvimento da moderna sociedade actual, com a indução electromagnética. Seu nome: *Micheal Faraday*. Também *Joseph Henry* (1797-1878), na América, desenvolveu na mesma época trabalhos semelhantes, chegando às mesmas conclusões. O trabalho de *Oersted* demonstrou, que efeitos magnéticos podiam ser produzidos por cargas eléctricas em movimento, enquanto os trabalhos de *Faraday* e de *Henry* mostraram que correntes podiam ser produzidas por imãs em movimento.

Após todos estes desenvolvimentos, *J. Maxwell* irá alicerçar e unificar todos os conhecimentos no que hoje conhecemos como um dos ramos da Física – o Electromagnetismo – figura 7.5.



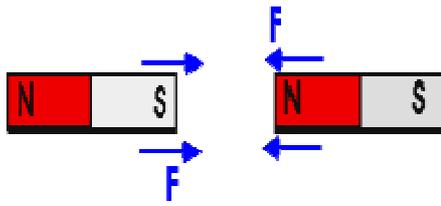


Figura 7.7 a) – Atração de polos opostos.

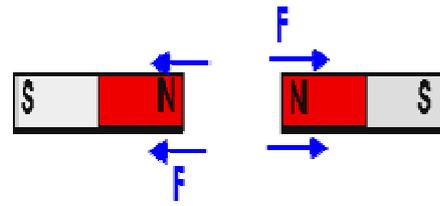


Figura 7.7 b) – Repulsão de polos iguais.

Do ponto de vista quantitativo, verificou-se que o efeito do ímã varia com a distância e que a interacção entre dois polos é dada por:

$$F_{Mag} = \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2}{4\pi \mu_0 r^2} \quad (7.1)$$

em que os  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  são as intensidades dos polos magnéticos e  $\mu_0$  é a permeabilidade do vazio (ou constante magnética do vácuo).

Como já referido, *John Michell* descobriu em 1750, que a intensidade das forças produzidas num ímã, por cada polo é igual e diminuem proporcionalmente com o quadrado da distância. A interacção entre os polos dos ímanes segue assim a lei do inverso do quadrado da distância.

Estes polos magnéticos dos ímanes são análogos, não as cargas eléctricas, mas sim ao efeito de polarização observado nos dieléctricos. Como veremos mais adiante, não existe o polo magnético isolado. Por outras palavras, não existem cargas magnéticas. A menor entidade magnética é o dipolo magnético. Mas isso não nos impede de usar esse formalismo - do efeito de um “polo magnético” (sabendo de antemão que ele não existe isoladamente na natureza).

## 7.2 Campo Magnético e Indução Magnética

As forças de interacção entre os ímanes denominam-se por forças magnéticas. Tal como para as interacções eléctricas, que são descritas através do campo eléctrico, as interacções magnéticas são descritas através de uma grandeza vectorial denominado campo magnético.

Podemos definir a intensidade do **campo magnético**  $H$ , como;

$$|\vec{H}| = \frac{\bar{Q}}{4\pi \mu_0 r^2} \text{ A.m}^{-1} \quad (7.2)$$

em que  $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  e  $c = 2,9979 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$  é a velocidade da luz (radiação electromagnética no vácuo (vazio)).

Tal como para o campo eléctrico, podemos definir o potencial (ou diferença de potencial) magnético  $\bar{V}$ , como o trabalho necessário para juntar polos magnéticos;

$$\bar{V} = \int_A^B -\vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (7.3)$$

Numa circulação ( $B = A$ ) a diferença de potencial magnético é zero, pelo que o campo magnético é também ele **conservativo** (tal como acontece para o campo eléctrico).

As interacções de natureza magnética podem ser descritas, quer através da grandeza campo magnético  $\vec{H}$ , quer através da grandeza campo de indução magnética  $\vec{B}$ . A relação entre estes dois campos no vácuo, é representada na expressão 7.4 e serve também como definição para  $\vec{B}$ .

Definimos então o **vector de indução magnética**  $\vec{B}$  como;

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{T (Wb.m}^{-2}\text{)} \quad (7.4)$$

$\vec{B}$  é também conhecido com **vector densidade de fluxo magnético**.

O campo de indução magnética B é medido (no S.I.) em tesla (T) e o campo magnético H é medido em ampere por metro ( $\text{A.m}^{-1}$ ). Uma outra unidade muito usada para expressar o campo de indução B é o gauss (G), sendo que  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ . O campo de indução magnética da Terra tem uma intensidade da ordem de 0,5 G.

### 7.2.1 Linhas do campo magnético

A existência e verificação dessas linhas magnéticas podem ser materializadas, colocando pequenas partículas de prova (também elas com propriedades magnéticas), por exemplo, limalha de ferro, em torno de um objecto magnético, tal como exemplificado nas figuras 7.8.

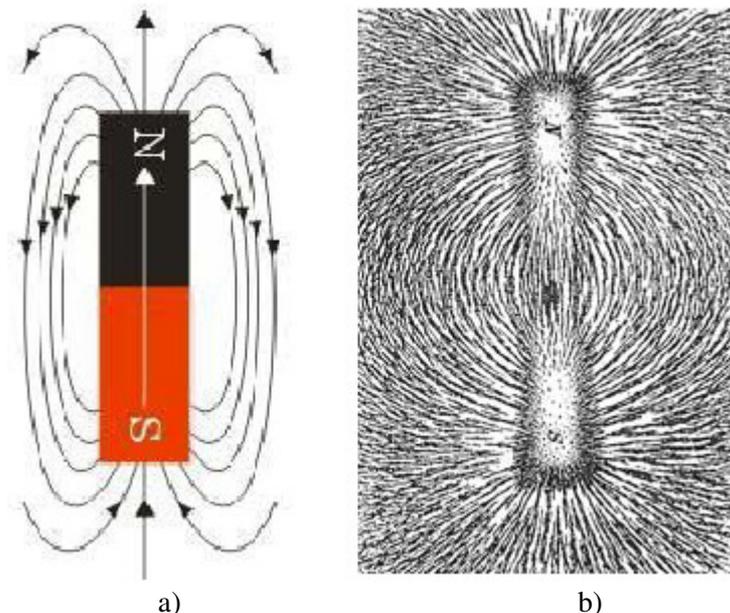


Figura 7.8 a) – Representação de linhas magnéticas de um íman em barra (no plano). 7.8 b) – Imagem real dessas linhas.

As linhas de campo de indução magnética de um íman saem do seu pólo norte magnético, entram pelo seu pólo sul e continuam dentro do íman na direcção do pólo norte, formando uma curva fechada (figuras 7.8 a). O campo é tangente, em cada ponto, às linhas de campo.

### 7.2.2 Campos magnéticos uniformes e não uniformes

Os campos de indução magnética podem ser uniformes ou não uniformes. Num campo uniforme, a densidade das linhas de campo é constante; num campo não uniforme, a densidade de linhas de campo é variável.

Numa região do espaço onde o campo magnético é uniforme,  $B$  (ou  $H$ ) têm o mesmo valor em todos os pontos e as linhas de campo são paralelas e equidistantes entre si. É o caso do campo na região interior (entre os braços) de um íman em forma de U (em forma de ferradura), figura 7.9.

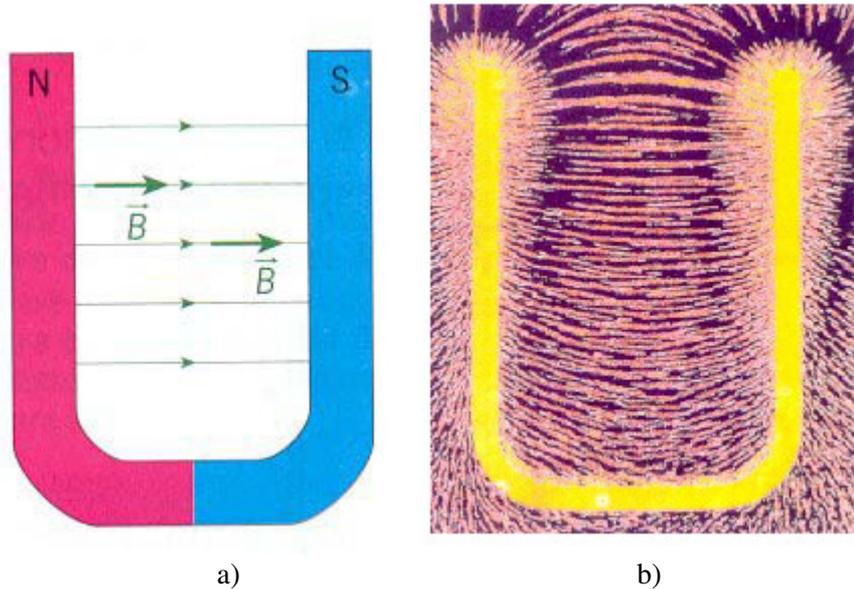


Figura 7.9 a) – Representação de linhas magnéticas de um íman em U (no plano). 7.9 b) – Imagem real dessas linhas.

Num campo magnético não uniforme,  $B$  (ou  $H$ ) têm um valor diferente em cada ponto do espaço e a densidade de linhas de campo é variável. É o caso do campo gerado por um íman do tipo barra magnética, figura 7.8.

### 7.2.3 Ordens de grandeza dos campos magnéticos

Na natureza, as intensidades das acções magnéticas variam muito. Na tabela 7.1 estão expostos alguns exemplos de valores de campo magnético  $H$ .

Tabela 7.1 – Intensidade do campo magnético.

Sistema ou material magnético	$H$ (A.m <sup>-1</sup> )
Superfície de uma estrela de neutrões	$10^{14}$
Magnetes implosivos (duração $\mu$ s)	$10^8$
Electromagnetes pulsados (duração $\mu$ s)	$2 \times 10^7 - 5 \times 10^7$
Magnetes supercondutores	$1 \times 10^7 - 1,5 \times 10^7$
Electromagnetes usados em laboratório	$1 \times 10^6 - 2 \times 10^6$
Magnetes permanentes mais fortes	$1 \times 10^6$
Campo magnético de Júpiter	1400
Campo magnético à superfície da Terra	100
Ruído magnético urbano	1
Magnetocardiogramas	$10^{-4}$
Batimento cardíaco fetal	$10^{-5}$
Campo magnético de um cérebro humano	$10^{-6}$
Limite de detecção de um SQUID	$10^{-8}$

A ordem de grandeza do campo de indução magnética  $B$ , gerado pelos ímanes permanentes mais fortes é de  $1 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} = 1,26$  T. Este resultado mostra em particular, que um campo

de indução magnética de 1 tesla é efectivamente um campo muito intenso. A ordem de grandeza do campo de indução magnética terrestre é de apenas  $1,26 \times 10^{-4}$  T.

Será que os campos magnéticos só podem ser gerados por ímanes e materiais magnéticos?

### 7.3 Campo Magnético das correntes eléctricas

Com os desenvolvimentos da Física no séc. XIX, compreendeu-se que as interacções magnéticas não existiam exclusivamente entre os ímanes. As correntes eléctricas, então colocadas em prática, e, de um modo mais geral, as cargas eléctricas em movimento produzem também campos magnéticos em seu redor.

#### 7.3.1 As experiências de Oersted

A “fusão” entre ambos os ramos, electricidade e magnetismo, ocorre pela mão do físico dinamarquês *Hans Christian Oersted* (1777-1851). Em 1819-20, *Oersted* verificou experimentalmente que a passagem de corrente eléctrica através de um fio condutor obrigava uma agulha magnética próxima do fio a modificar a sua orientação, alteração que dependia do sentido da corrente, figura 7.10.

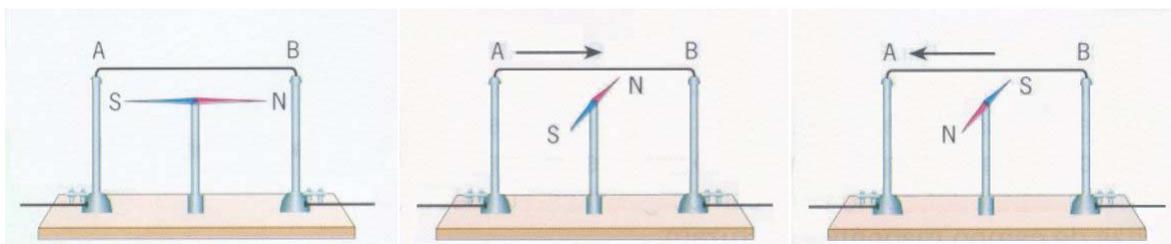


Figura 7.10 – Acção da corrente eléctrica sobre uma bússola.

As realizações experimentais de *Oersted* permitiram verificar que uma corrente eléctrica gerava à sua volta um campo magnético capaz de interagir com a agulha magnética. Os resultados de *Oersted* foram estendidos pelas experiências que se seguiram. *André-Marie Ampère* (1775-1836), mostrou que os efeitos não se manifestam somente entre corrente eléctrica e ímanes, mas ocorrem também interacções entre as próprias correntes eléctricas (figura 7.11);

- **correntes eléctricas paralelas e no mesmo sentido** – temos **atração** entre elas,
- **correntes eléctricas paralelas e de sentido oposto** – temos **repulsão**.

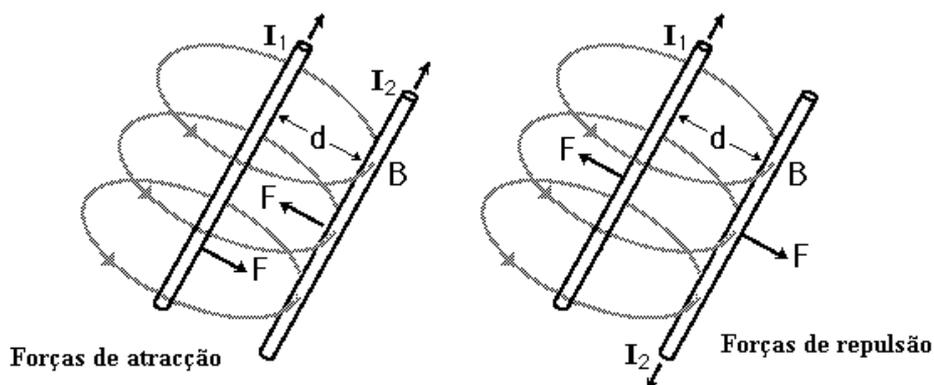


Figura 7.11 – Efeito de atracção e repulsão, entre corrente eléctrica paralelas.

Posteriormente *Henry A. Rowland* (1848-1901) mostrou que uma carga em movimento produz também um campo magnético. De facto, foi constatado que enquanto uma carga eléctrica em repouso (relativamente ao observador) gera no espaço apenas um campo eléctrico, uma carga em movimento (em relação ao observador) gera adicionalmente no espaço, não só um campo eléctrico como também um campo magnético.

### 7.3.2 Propriedades do campo e força magnética

Vamos relacionar o vector de indução magnética  $B$ , num ponto do espaço, em termos da força magnética  $F_{\text{mag}}$  exercida sobre um corpo de prova – uma carga eléctrica  $q$ , em movimento com velocidade  $v$ .

1. a força magnética é proporcional à carga  $q$  e ao módulo da sua velocidade  $v$ ,
2. os módulo e direcção da força magnética dependem da velocidade  $v$  e do módulo e direcção do campo de indução magnética  $B$ ,
3. se  $v$  for paralelo ao campo magnético, a força magnética é nula,
4. se  $v$  fizer um determinado ângulo  $\alpha$  com o campo de indução magnética  $B$ , a força magnética existe numa direcção perpendicular a  $v$  e a  $B$ ,
5. as forças magnéticas sobre particular com carga eléctrica de sinal contrário, são igualmente contrárias,
6. se  $v$  faz um ângulo  $\alpha$  com o vector  $B$ , o módulo da força magnética é proporcional a  $\text{sen } \alpha$ .

Todas estas constatações experimentais podem ser matematicamente sintetizadas na seguinte expressão:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.5a)$$

A **força magnética** depende assim da quantidade de carga  $q$  e da magnitude e orientação dos vectores envolvidos, velocidade  $v$  e indução magnética  $B$  (figura 7.12).

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = |\vec{v}| |\vec{B}| \text{sen}(\alpha) \vec{u}_n \quad (7.5b)$$

Esta força é também conhecida como **força electrodinâmica** ou por **lei de Laplace**.

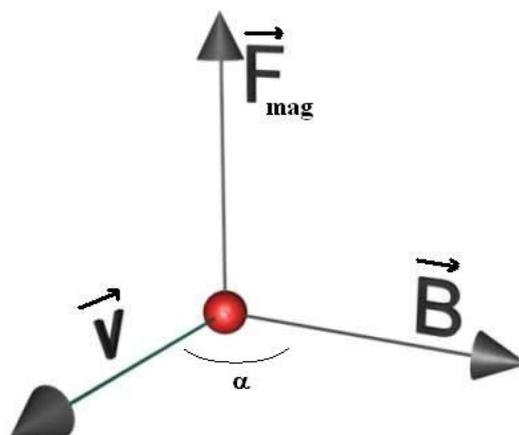


Figura 7.12 – Relação entre as grandezas  $v$ ,  $B$  e  $F_{\text{mag}}$ .

Uma carga de 1 C que se mova num campo de indução magnética  $B$  de 1 T, com velocidade de  $1 \text{ m.s}^{-1}$  (perpendicular a  $B$ ), fica sujeita a uma força de 1 N.

A força electrodinâmica é constantemente perpendicular a  $v$  e a  $B$ . Por esse motivo a força electrodinâmica que actua sobre uma partícula electrizada de carga  $q$  em movimento não realiza trabalho. Este resultado implica que uma partícula electrizada quando entra numa região do espaço onde existe um campo magnético não perde nem ganha energia.

Generalizando o resultado da lei de *Laplace*, se admitirmos que uma carga  $q$ , animada de velocidade  $v$ , é submetida à acção simultânea de um campo eléctrico  $E$  e de um campo de indução magnética  $B$ , então a força  $F$  que actua na partícula é, em cada instante, dada pela expressão:

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.6)$$

e neste caso a força é dita **força de Lorentz-Laplace**.

### Importantes diferenças entre as forças eléctricas e magnéticas

1. a força eléctrica é paralela à direcção do campo eléctrico, a **força magnética** é perpendicular à direcção do campo magnético.
2. a força eléctrica actua sempre sobre a carga, independentemente da sua velocidade, a **força magnética** só actua sobre uma carga se esta estiver em movimento.
3. a força eléctrica realiza trabalho ao deslocar uma carga, a **força magnética** de um campo magnético permanente não realiza trabalho quando a carga é deslocada.

### 7.3.3 Campo de indução magnética gerado por uma carga eléctrica em movimento

Uma carga eléctrica  $q$ , animada de velocidade  $v$  num dado referencial e no instante  $t$ , gera num ponto  $P$  à distância  $r$  da carga, uma indução magnética  $B_P$ , dada por (no vácuo):

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} (\vec{v} \times \vec{u}_r) \quad (7.7)$$

Esta relação é conhecida por **lei de Biot-Savart**.

De acordo com as regras do produto externo (ou vectorial) de dois vectores, a indução magnética no ponto  $P$  ( $B_P$ ) é um vector normal ao plano definido por  $v$  e por  $r$ , sendo  $q > 0$ , o sentido do vector  $B_P$  é tal que os três vectores  $v$ ,  $r$  e  $B_P$  formam um triedro directo (regra da mão direita, do saca-rolhas ou de *Stokes*), figura 7.13. A intensidade da indução magnética no ponto  $P$  é directamente proporcional a  $q$  e inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto  $P$  à carga eléctrica móvel.

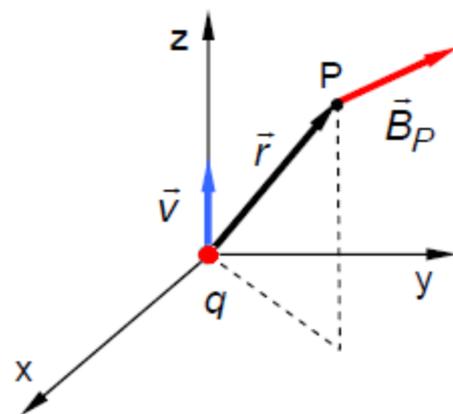


Figura 7.13 – Relação entre as grandezas  $v$ ,  $B$  e  $r$ .

Convém referir que a lei de *Biot-Savart* é uma lei aproximada. Na verdade ela só é válida para velocidades muito inferiores à velocidade da luz no vácuo ( $c$ ). Apesar desta limitação, a condição cumpre-se sempre que as cargas se acham organizadas em corrente eléctrica (como já vimos, no capítulo 6, as velocidades médias das cargas nos condutores metálicos são efectivamente baixas).

### 7.3.4 Trajectória de carga eléctrica em movimento num campo magnético uniforme

Consideremos uma partícula de massa  $m$  e carga eléctrica  $q > 0$ , animada de velocidade  $v$  e que entra numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética  $B$  uniforme e perpendicular a  $v$  (figura 7.14).

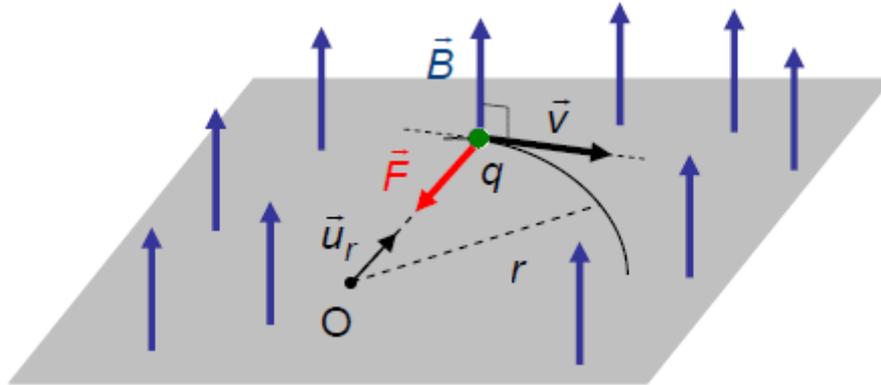


Figura 7.14 – Trajectória de uma carga num campo de indução uniforme  $B$ .

Nesta situação, a partícula vai ficar submetida a uma força magnética dada por:

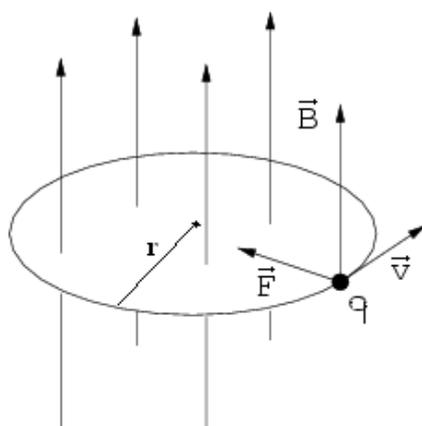
$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = -qvB \vec{u}_r \quad (7.8)$$

e cuja intensidade vale  $F_{mag} = qvB$ . A força magnética tende a curvar a trajetória da partícula, entrando a carga em movimento circular uniforme de raio  $r$ , se  $v$  e  $B$  forem constantes (no espaço e no tempo). A força magnética será nesse caso uma força normal (centrípeta ou central) e, por isso, será também igual a:

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = m\vec{a}_n = m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (7.9)$$

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

A força magnética age como uma força normal, e como o módulo da velocidade não é alterado, a **trajetória** é **circular e uniforme**. Vamos então calcular do raio dessa trajetória circular (figura 7.15):



$$\begin{aligned} |q|vB_{\perp} &= ma_n = \frac{mv^2}{r} \\ r &= \frac{mv}{|q|B_{\perp}} = \frac{p}{|q|B_{\perp}} \end{aligned} \quad (7.10)$$

sendo  $B_{\perp}$  a componente de  $B$  perpendicular a  $v$ .

Figura 7.15 – Trajectória circular de uma carga (negativa) num campo de indução uniforme  $B$ .

A frequência (ou velocidade) angular do movimento será  $\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} B_{\perp}$  e o seu período  $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB_{\perp}}$ . A frequência  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{q}{2\pi m} B_{\perp}$  é conhecida por **frequência de ciclotrão**.

Esta frequência, frequência angular ou período é independente da velocidade da partícula e do raio da sua trajectória. Só depende da intensidade do campo magnético e da partícula (relação carga/massa). É pois um método para discriminar as diferentes partículas, quando estas entrarem num campo magnético, figura 7.16.

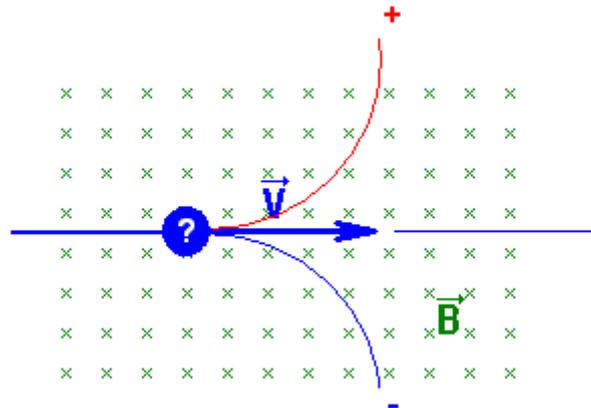


Figura 7.16 – Discriminador de partículas.

Regra geral a trajectória será espiralada, pois se o vector velocidade inicial fizer um ângulo diferente de  $90^{\circ}$  (com B), a componente da velocidade paralela a B mantêm-se inalterável, e a partícula terá um movimento composto de circulação (periódico) com um movimento rectilíneo uniforme – **movimento em espiral** (figura 7.17).

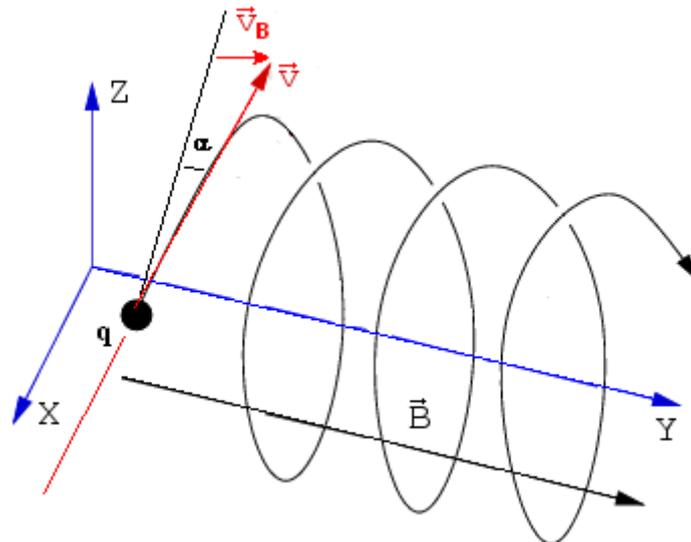


Figura 7.17 – Trajectória em espiral de partícula, sob acção magnética.

### E se houver também campo eléctrico E?

Esta é a situação mais habitual, estarmos na presença dos dois campos, E e H.

No campo eléctrico, como já sabemos, a carga  $q$  é acelerada na mesma direcção do campo eléctrico E, ou seja adquire um movimento uniformemente acelerado;  $\vec{F}_{elect} = q\vec{E} = m\vec{a}_1$

Em campo eléctrico e magnético, teremos a combinação destes dois efeitos e a trajectória será função da orientação de todos os parâmetros vectoriais do problema;  $\vec{F} = \vec{F}_{elect} + \vec{F}_{mag} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  (força de *Lorentz-Laplace*) (figura 7.18).

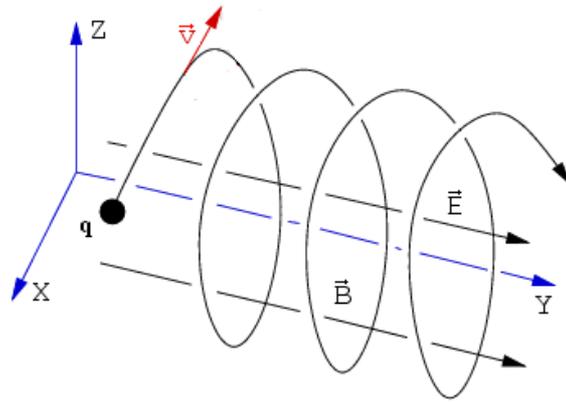


Figura 7.18 – Trajectória em espiral de partícula, sob acção eléctrica e magnética.

Como já foi referido, regra geral, teremos movimentos espiralados, estando a orientação do eixo da espiral e o seu passo, relacionado com o campo eléctrico  $E$ , e a curvatura da trajectória circular relacionada com a indução magnética  $B$ . Tudo também relacionado, com a razão  $q/m$  da partícula em questão.

### Exercício 7.1

Calcular os raios de trajectória ( $r$ ) e respectivos períodos ( $T$ ), para um electrão e um protão animados de velocidade  $3 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ , quando estes entram perpendicularmente num campo de indução magnética  $B$ , de intensidade  $0,5 \text{ T}$ .

$$m_p = 1,672622 \times 10^{-27} \text{ kg}, q_p = + 1,602177 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9,109382 \times 10^{-31} \text{ kg}, q_e = - 1,602177 \times 10^{-19} \text{ C}$$

### 7.3.5 Efeito de Hall

A força de *Lorentz-Laplace* actua, quer tenhamos uma carga livre ou num condutor. No condutor o desvio sofrido pela carga tem uma limitação física que é a sua superfície fronteira limítrofe, figura 7.19. Temos um desvio e consequente acumulação de cargas de sinais opostos no condutor, com a criação de uma diferença de potencial eléctrico (d.d.p.) entre estas superfícies (*efeito de Hall*) – e um campo eléctrico  $E_H$  (H de Hall) perpendicular ao campo eléctrico preexistente.

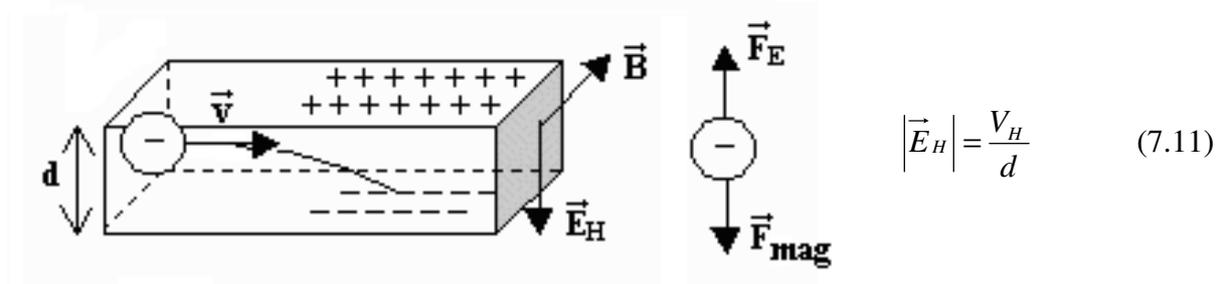


Figura 7.19 – Efeito de *Hall*, de desvio das cargas eléctricas.

Esta acumulação de cargas vai criar o campo  $E_H$ , que actua nas cargas (negativas) no sentido contrário ( $F_E$ ) em relação à  $F_{mag}$ . Na situação de equilíbrio temos;

$$F_{mag} = qvB = qE_H = F_E \quad E_H = vB \quad e \quad V_H = E_H d = vBd$$

o que permite usar este efeito, por exemplo, para medir campos magnéticos.

### 7.3.6 Força magnética num condutor percorrido por uma corrente eléctrica

Se uma carga  $q$  em movimento é actuada pelo campo magnético, não é obviamente de se estranhar que um fio percorrido por corrente eléctrica seja igualmente actuado pelo campo magnético (uma vez que se trata de um “fluxo” de cargas eléctricas).

Consideremos então um fio recto de comprimento  $l$ , secção recta com área  $A$ , percorrido por uma corrente de intensidade  $I$ , imerso num campo uniforme de indução magnética  $\vec{B}$ . sendo  $n$  a densidade volúmica de cargas móveis, figura 7.20.

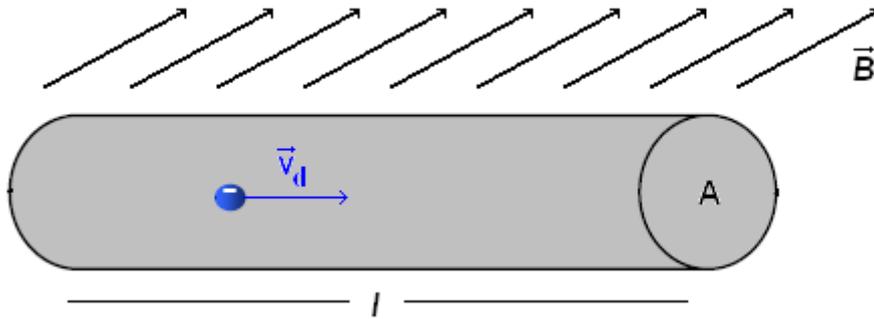


Figura 7.20 – Acção do campo de indução magnética  $\vec{B}$  sobre uma corrente eléctrica, num fio recto.

A força magnética sobre esse elemento de comprimento  $l$ , será;

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v}_d \times \vec{B})nAl \quad (7.12a)$$

$$\vec{F}_{mag} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (7.12b)$$

em que  $I = nqv_dA$  e  $\vec{l} = l\vec{u}_{v_d}$

Consideremos agora um fio de forma arbitrária (mas na mesma com secção recta uniforme), imerso num campo de indução magnética  $\vec{B}$ . Para um pequeno elemento (segmento infinitesimal)  $ds$ , a força magnética aplicada é dada pela mesma expressão anterior, figura 7.21;

$$d\vec{F}_{mag} = I(\vec{ds} \times \vec{B}) \quad \text{e} \quad \vec{F}_{mag} = I \int_a^b \vec{ds} \times \vec{B}$$

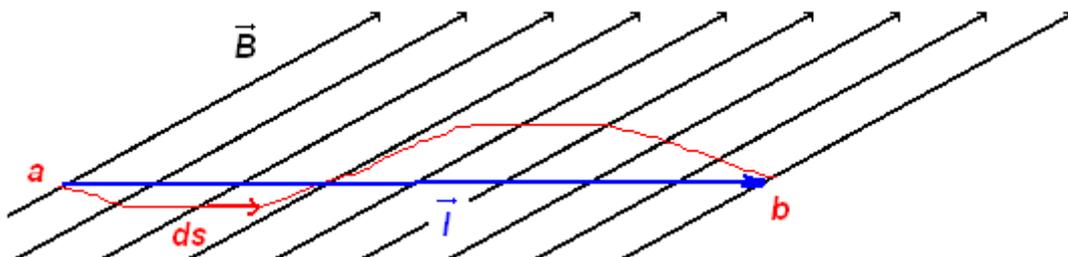


Figura 7.21 – Acção do campo de indução magnética  $\vec{B}$  sobre uma corrente eléctrica, num fio.

vem então que:

$$\vec{F}_{mag} = I \left( \int_a^b \vec{ds} \right) \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (7.13)$$

Em particular se o circuito for fechado (figura 7.22), temos:

$$d\vec{F}_{mag} = I(\vec{ds} \times \vec{B}) \quad \text{e} \quad \vec{F}_{mag} = I \oint \vec{ds} \times \vec{B}$$

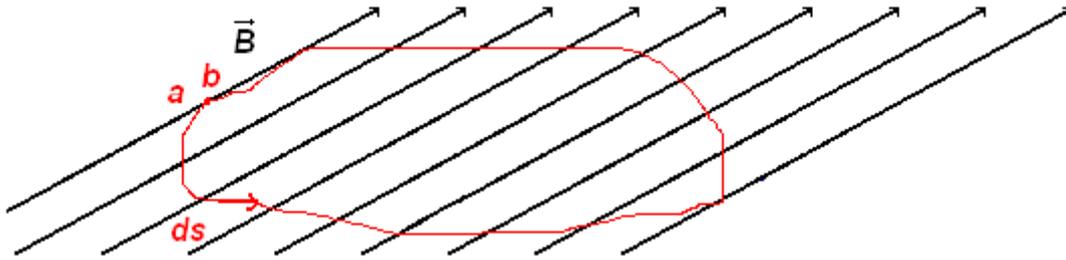


Figura 7.22 – Acção do campo de indução magnética  $B$  sobre uma corrente eléctrica, num fio fechado.

$$\text{o que resulta em: } \vec{F}_{mag} = I \left( \oint \vec{ds} \right) \times \vec{B} = 0$$

**A força magnética total numa espira fechada imersa num campo de indução magnética  $B$  uniforme – é nula**

### 7.3.7 Momento numa espira de corrente, imersa num campo magnético uniforme

Consideremos uma espira plana rectangular, percorrida por uma corrente de intensidade  $I$ , imersa num campo de indução magnética  $B$ , campo este, uniforme e existente no plano da espira, figura 7.23

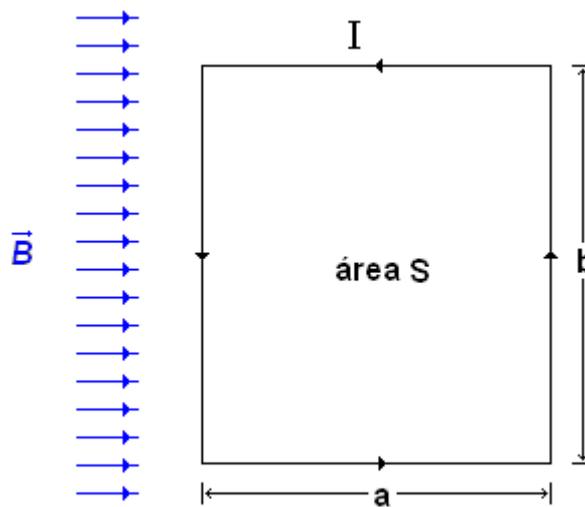


Figura 7.23 – Espira rectangular imersa num campo de indução magnética  $B$ .

As forças sobre os lados de comprimento  $\underline{a}$  – são nulas, pois os lados  $\underline{a}$  (e as correntes  $I$ ) são paralelos a  $B$ .

$$d\vec{F}_{mag} = I(\vec{dl} \times \vec{B}) = 0 \quad (7.14)$$

Nos lados de comprimento  $\underline{b}$  – os módulos das forças são:

$$|\vec{F}_{mag}| = I \int_b \vec{dl} \times \vec{B} = IbB \quad (7.15)$$

Se a espira tiver o grau de liberdade de rodar em torno de um eixo que passa por  $O$ , teremos então a acção deste binário de forças magnéticas, como representado na figura 7.24.

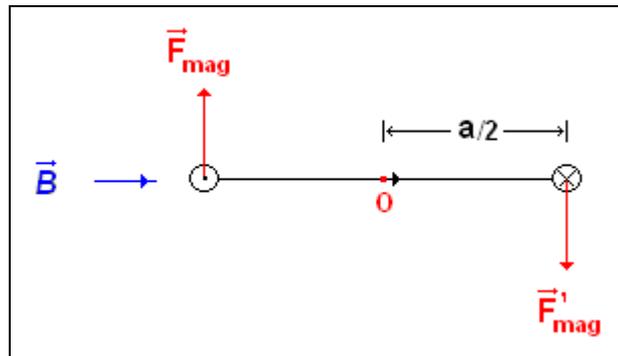


Figura 7.24 – Forças anti-paralelas sobre uma espira rectangular.

O módulo do Momento das forças magnéticas será:

$$|\vec{M}_o| = F_{mag} \frac{a}{2} + F'_{mag} \frac{a}{2} = IabB \quad (7.16)$$

mas  $\underline{ab}$  é a área  $S$  da espira, logo vem;  $|\vec{M}_o| = ISB$

(resultado apenas válido quando  $B$  existe no plano da espira)

### Mas, e se $B$ não estiver no plano da espira. O que acontece?

Façamos então a seguinte análise, em que o  $B$  faz um ângulo  $\theta$  com a normal da espira, e ainda é perpendicular aos lados  $\underline{b}$ , figura 7.25. As forças devido aos lados  $\underline{a}$ , cancelam-se mutuamente. Mas as actuaes nos lados  $\underline{b}$ , constituem na mesma um binário, cujo momento é:

$$|\vec{M}_o| = F_{mag} \frac{a}{2} \text{sen} \theta + F'_{mag} \frac{a}{2} \text{sen} \theta \quad (7.17)$$

$$|\vec{M}_o| = Iab \text{sen} \theta B = IS \text{sen} \theta B$$

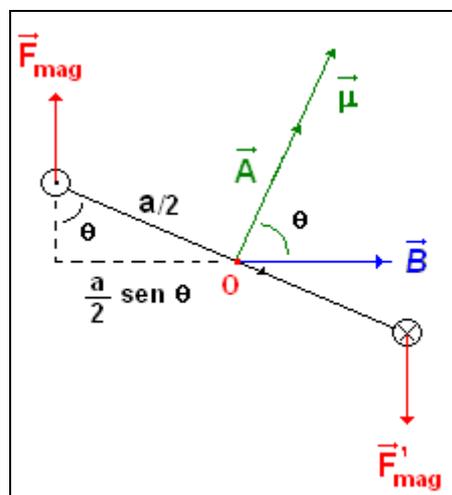


Figura 7.25 – Forças anti-paralelas sobre uma espira rectangular, não paralela a  $B$ .

Este resultado mostra que o momento é máximo quando B existir no plano da espira e mínimo (nulo) quando for perpendicular a esta. Por acção deste momento, a espira tende a rodar de modo que a sua normal fique paralela a B.

A correspondente expressão vectorial do momento é:

$$\vec{M}_o = I\vec{A} \times \vec{B} \quad (7.18)$$

em que  $\vec{A}$  é o vector normal à espira, com o módulo correspondente à sua área (S).

### 7.3.7.1 Momento Magnético

Ao produto entre a intensidade de corrente I a o vector  $\vec{A}$ , chamamos de momento magnético  $\vec{\mu}$  da espira:

$$\vec{\mu} = I\vec{A} \quad (7.19)$$

A unidade SI do momento magnético é A.m<sup>2</sup> (ou JT<sup>-1</sup>)

Assim sendo, o momento sobre a espira vem: 
$$\vec{M}_o = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (7.20)$$

(resultado esse semelhante à acção de um campo eléctrico sobre um dipolo eléctrico de momento dipolar  $\vec{p}$ ,  $\vec{M}_o = \vec{p} \times \vec{E}$ )

Esta expressão 7.20 é válida para qualquer orientação de B e para qualquer que seja a forma que as espiras tenham.

### O que acontece se existir uma bobina com n espiras?

Se fizermos a aproximação de termos n espiras iguais, então teremos n vezes o seu efeito individual,  $\vec{M}_o = n\vec{\mu} \times \vec{B}$

#### Exercício 7.2

Qual o módulo do momento magnético  $\mu$  de uma bobina rectangular (5,40 cm × 8,50 cm), com 25 espiras percorrida por uma corrente de intensidade 15 mA?

Se essa bobina estiver imersa num campo B de intensidade 0,350 T, existente no plano desta, qual o momento resultante sobre a bobina?

### 7.3.8 Aplicações da lei de Biot-Savart

Vejamos agora, por aplicação da lei de Biot-Savart, quais os campos magnéticos criados por especiais distribuições de correntes eléctricas.

### 7.3.8.1 Campo magnético de um fio retilíneo e infinito

Consideremos um fio infinito de comprimento indefinido, coincidente com o eixo dos ZZ, percorrido por uma corrente de intensidade I, figura 7.26.

A indução magnética no ponto P, será o efeito de todos os elementos de corrente Idz sobre esse ponto.

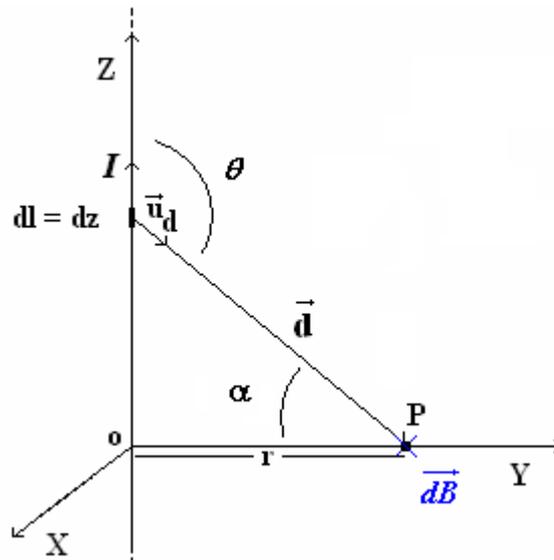


Figura 7.26 – Efeito magnético no ponto P, do elemento de corrente Idz.

Atendendo à lei de *Biot-Savart* (7.7) para uma carga pontual, e à relação nossa conhecida  $I = nq_e vA$ , se multiplicarmos esta por um elemento de comprimento dz, obtemos  $Idz = nq_e vAdz$  em que  $nq_e Adz = q$ , uma vez que Adz é um volume infinitesimal, n a densidade de cargas elementares  $q_e$  (electrões) por unidade de volume. Logo  $Idz = qv$ . O campo (infinitesimal) de indução magnética B no ponto P, vem;

$$d\vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \times \vec{u}_d}{d^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \operatorname{sen}\theta}{d^2} \vec{u}_x$$

e o efeito de todos os infinitesimais elementos de corrente Idz será;

$$\vec{B}_P = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{B} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \operatorname{sen}\theta}{d^2} dz \vec{u}_x$$

Para resolver este integral indefinido, fazemos a mudança de variável  $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$ , vindo;

$$\vec{B}_P = \int_0^\pi d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} d\theta \vec{u}_x \quad \text{o que integrando dá:}$$

$$\boxed{\vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} \vec{u}_x} \quad (7.21)$$

Campo de indução magnética B, criado à distância r do fio infinito.

Uma corrente de 1 A num fio retilíneo infinito, origina a 2 m deste uma indução magnética B com intensidade  $10^{-7}$  T.

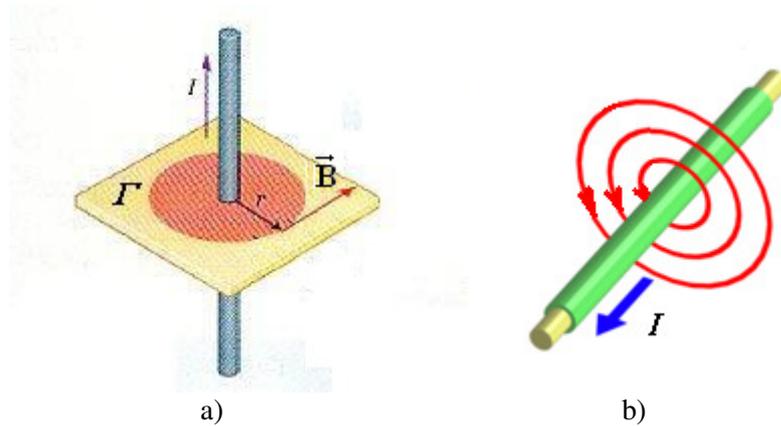
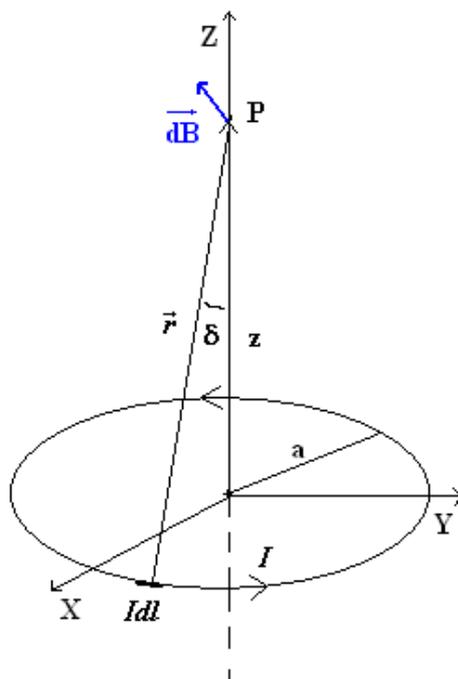


Figura 7.27 – Indução magnética em redor de um fio rectilíneo de corrente.

### Propriedades do campo de indução magnética B

- o campo B é sempre perpendicular ao elemento de corrente I e ao vector posição de P, segundo a “regra da mão direita” (figura 7.27a),
- a intensidade da indução B depende da distância a P,
- as linhas de B são fechadas sobre si próprias (figura 7.27b).

#### 7.3.8.2 Campo magnético de um fio circular (espira)



Um circuito de raio  $a$  e intensidade de corrente  $I$ , provoca um campo de indução magnética com intensidade  $B$ , ao longo do seu eixo, dado por;

$$d\vec{B}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(a^2 + z^2)^{3/2}} a \vec{u}_z$$

( $r^2 = a^2 + z^2$  e as componentes de B paralelas ao circuito anulam-se)

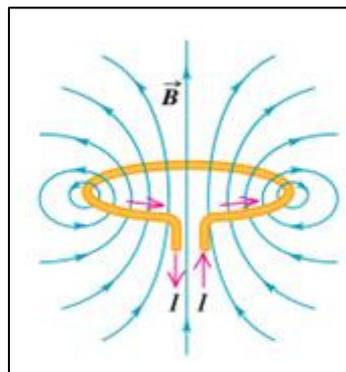
$$\vec{B}_z = \int_0^{2\pi} d\vec{B}_z = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\pi a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

No centro da espira ( $z = 0$  m), a expressão toma a seguinte forma;

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{a} \vec{u}_z \quad (7.22)$$

Figura 7.28 – Geometria da indução magnética no eixo de uma espira percorrida por corrente.

Figura 7.29 – Linhas do campo de indução magnética Em torno de uma espira percorrida por corrente.



### 7.3.9 Lei de Ampère

Tal como fizemos para o campo eléctrico, vamos calcular o integral de linha, mas aplicado ao campo magnético. Consideremos de novo o fio rectilíneo infinito percorrido por uma corrente constante  $I$ , figura 7.27a).

O campo de indução magnética tem a mesma intensidade em qualquer percurso circular concêntrico com o fio e a sua direcção é sempre tangente ao mesmo, existindo no plano  $\Gamma$  (da figura 7.27a).

Deste modo o integral de linha do campo de indução magnética  $B$ , numa circunferência centrada no fio deverá ser simplesmente:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| \times 2\pi r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} \times 2\pi r = \mu_0 I \quad (7.23a)$$

atendendo à expressão do campo de indução magnética dada por 7.21.

Para o fio infinito, podemos dizer que o seu integral de linha é igual a  $\mu_0$  vezes a corrente  $I$  encerrada (enlaçada) pelo percurso do integral.

O resultado não é só válido neste caso particular, mas antes **em todas as situações**, independentemente da linha fechada escolhida (figura 7.30a). Se o percurso integral não encerrar qualquer corrente no seu interior, o seu valor será obviamente nulo (figura 7.30b).

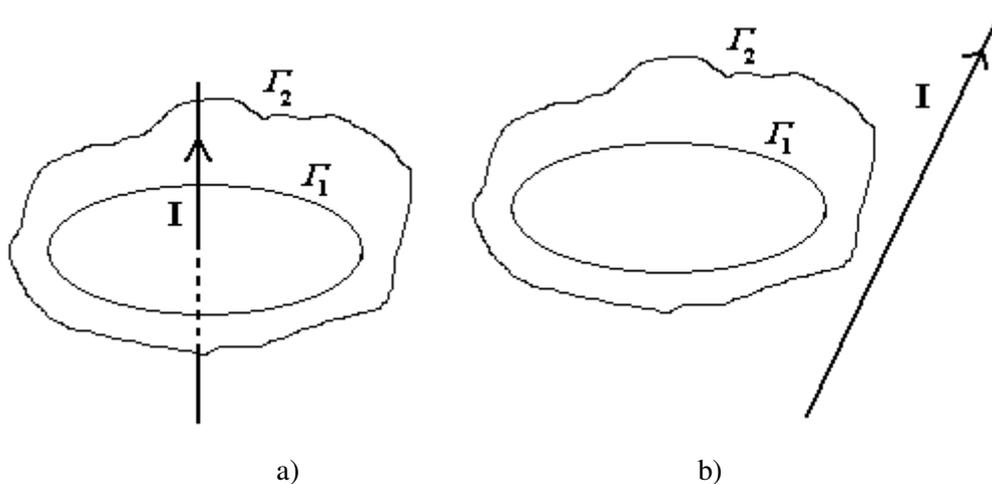


Figura 7.30 – Lei de Ampère.

Este resultado muito importante, expressa a **lei de Ampère**:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (7.23b)$$

e como temos  $I = \iint_{Sup} \vec{J} \cdot d\vec{s}$

podemos então escrever que,  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{Sup} \vec{J} \cdot d\vec{s}$

### Considerações:

- a **circulação é positiva** sempre com a superfície à sua **esquerda**,
- a **normal é positiva** de acordo com a circulação (**regra mão direita**),
- as **curvas e áreas não têm de ser planas**,
- existe **analogia** com a lei do fluxo do campo eléctrico – aplicações a casos de simetria.

#### 7.3.9.1 Aplicação da lei de Ampère - Solenóide

Se não tivermos apenas uma espira, mas um número  $N$  de espiras iguais, o campo de indução magnética na região central deste solenóide de comprimento  $d$  (figura 7.31), será então dado por:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{N}{d} I \quad (7.24)$$

e  $|\vec{B}| = \mu_0 n I$ , em que  $n$  é a densidade de espiras por unidade de comprimento,  $\frac{N}{d}$ .

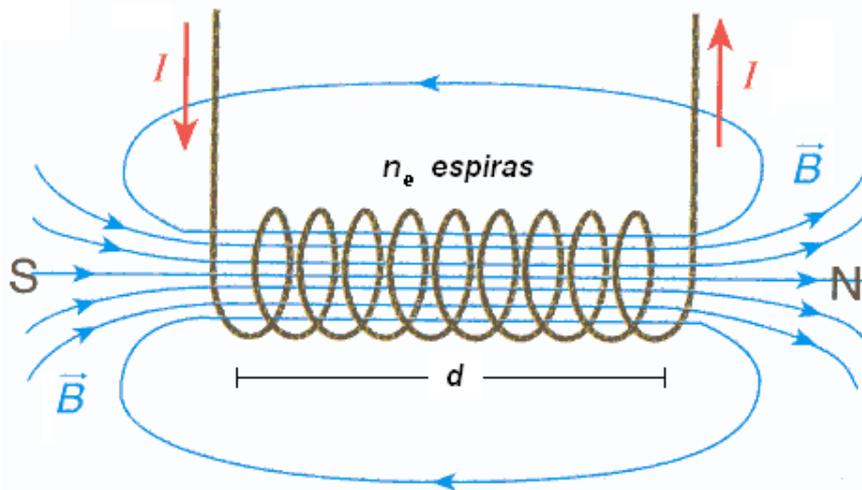


Figura 7.31 – Campo de indução magnética criado por um solenóide.

#### 7.3.9.2 Aplicação da lei de Ampère - Interior de um fio rectilíneo infinito

Consideremos agora um fio condutor de raio  $a$ , e apliquemos a lei de *Ampère* no seu interior ( $r < a$ ) (figura 7.32). Como estamos a tomar uma densidade de corrente ( $J$ ) uniforme, temos;

$$i = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I \quad \text{e} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| \times 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \quad \text{vindo}$$

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2} I \quad \text{para } (r < a) \quad \text{e} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{para } (r \geq a)$$

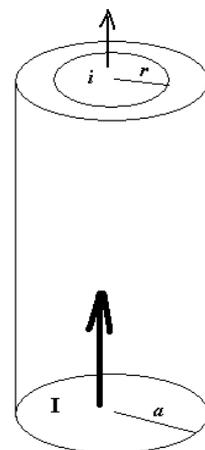


Figura 7.32 – Fio rectilíneo de raio  $a$  percorrido por corrente  $I$ .

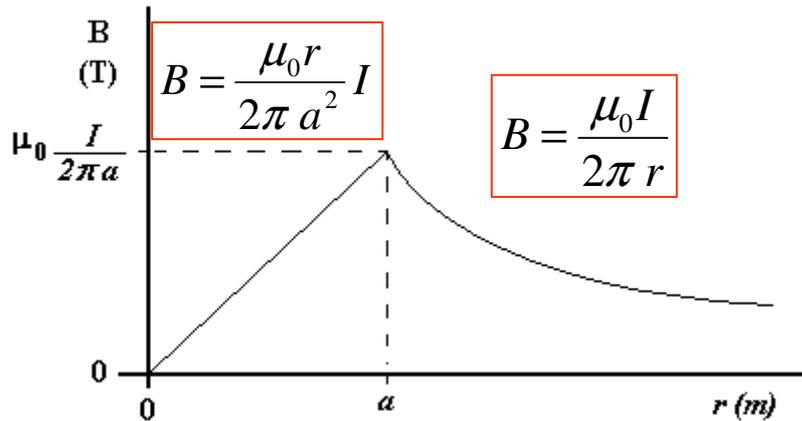


Figura 7.33 – Intensidade do campo de indução magnética, criado por um fio.

A intensidade do campo de indução magnética, no interior e exterior do fio rectilíneo, está retratado na figura 7.33.

**Quando temos agora um sistema de dois condutores rectilíneos, paralelos e percorridos por correntes, qual a sua acção no seu exterior e qual a força mútua entre eles exercida?**

A interacção é governada pela força *Lorentz-Laplace* (expressão 7.6), que se reduz simplesmente à força magnética, pois nos condutores existe um equilíbrio entre as cargas positivas (da estrutura) e cargas negativas (móveis).

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

e no caso da figura 7.34a), vem que:  $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d}$  e a força por unidade de comprimento neste fio é dada por:

$$F_{mag} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d} \quad (7.25)$$

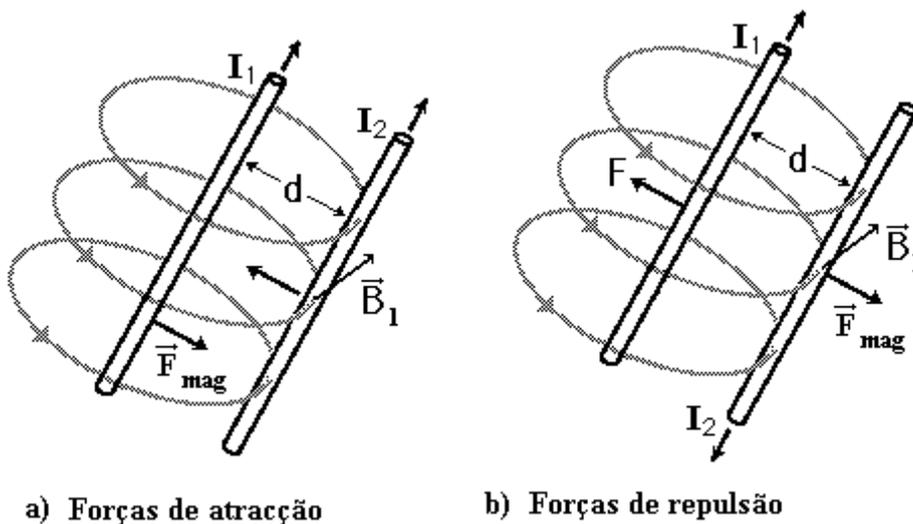


Figura 7.34 – Forças de atracção e repulsão entre fios percorridos por correntes.

**Correntes paralelas: atracção mútua** - **Correntes anti-paralelas: repulsão mútua**

### 7.3.9.3 Definição do Ampère

Da interacção entre correntes eléctricas (cargas em movimento), decorre uma maneira prática de definir a nossa unidade de intensidade de corrente - o *Ampère*.

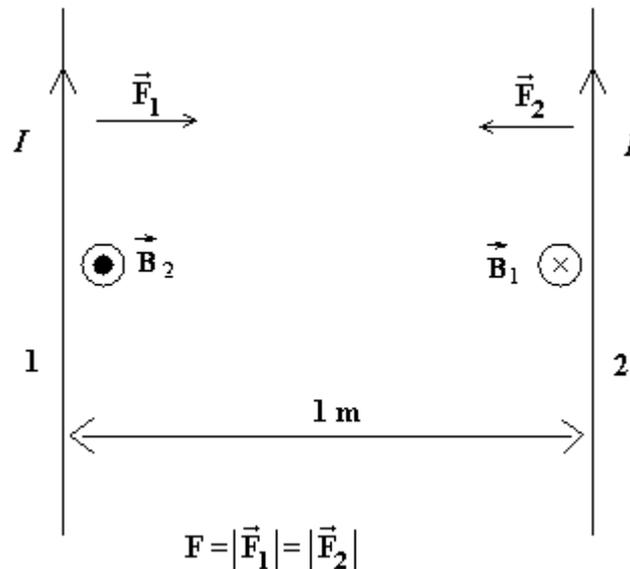


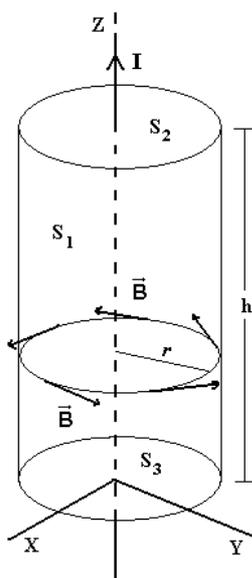
Figura 7.35 – Esquema para definição do Ampère.

Da expressão 7.25, decorre que:  $F_{mag} = \frac{\mu_0 2 I \times I}{4\pi d} = \frac{\mu_0 2 \times 1 \times 1}{4\pi \times 1} = \frac{\mu_0}{2\pi}$

$$F_{mag} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \text{ Nm}^{-1} \quad (7.26)$$

**Definição: 1 A** - Intensidade de corrente eléctrica que produz nos condutores uma força de  $2 \times 10^{-7} \text{ Nm}^{-1}$ , quando estes dois condutores paralelos se encontram à distância de 1 metro entre si.

### 7.3.10 Integral de superfície do campo magnético



Qual o resultado de aplicar um integral de superfície ao campo de indução magnética?

$$\oiint_{Sup} \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (7.27)$$

A figura 7.36 contém um fio infinito (em Z) percorrido por uma corrente I. Calculemos o integral de superfície (fechada) do campo de indução magnética na superfície do cilindro concêntrico, de raio r e altura h.

$$\oiint_{Sup} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \oiint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{u}_r ds_1 + \oiint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{u}_z ds_2 + \oiint_{S_3} \vec{B} \cdot (-\vec{u}_z) ds_3$$

Figura 7.36 – Superfície fechada em torno de um fio de corrente.

Como o campo de indução magnética é sempre perpendicular às normais das várias superfícies ( $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ ), (fazem sempre um ângulo de  $90^\circ$ ), temos que;

$$\oiint_{Sup} \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (7.28)$$

**Este importante resultado - é geral - quer tenhamos a superfície fechada atravessada ou não por correntes eléctricas.**

Significa isto que a contabilização do fluxo de B é nula para qualquer superfície fechada.

### 7.3.11 Equação de *Maxwell* do magnetismo

Este resultado pode ser descrito em termos diferenciais da seguinte forma, (atendendo ao teorema do fluxo-divergência);

$$\oiint_{Sup} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iiint_{volume} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv = 0 \quad (7.29a)$$

Para que a expressão anterior seja nula, e como o volume encerrado pela superfície não o é, só podemos então ter que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0 \quad (7.29b)$$

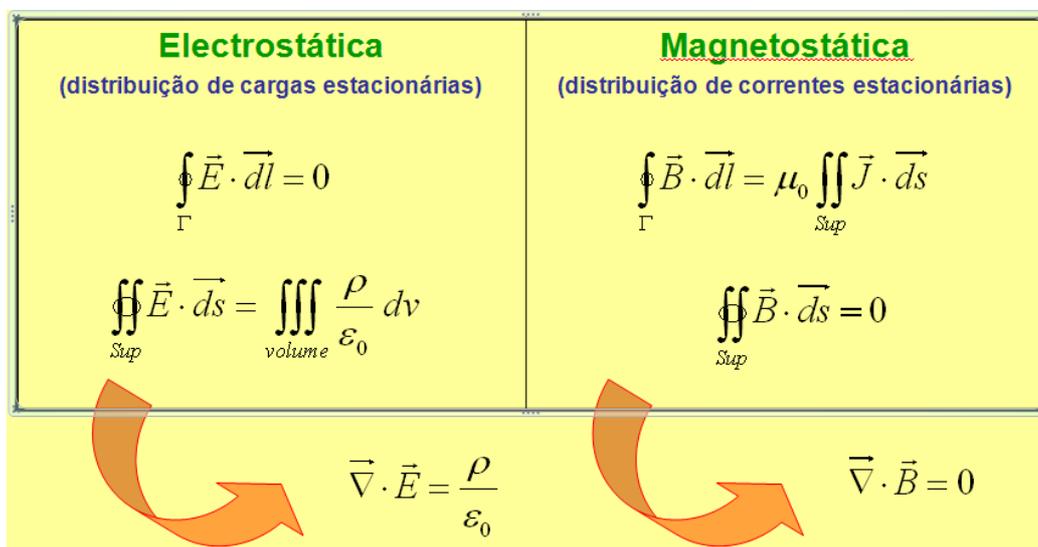
e esta representa uma das quatro equações de *Maxwell*.

**Qual o significado físico-matemático desta equação?**

- **matematicamente** - representa um **campo solenoidal**
- **fisicamente** - indica que **não existem cargas magnéticas**.  
(por analogia com a 1ª equação de *Maxwell*)

### **Comparação entre leis da electrostática e magnetostática**

Este resultado pode ser descrito em termos diferenciais da seguinte forma;



### 7.3.12 Correntes eléctricas versus íman

O campo magnético criado por um pequeno circuito eléctrico de corrente pode ser, quando visto à distância, idêntico ao do gerado por um pequeno íman (figura 7.37). O momento magnético (produto da intensidade de corrente  $I$  pela área  $S$  do circuito) é proporcional ao momento do íman (intensidade do “pólo magnético” pela distância que separa os pólos no dipolo magnético), figura 7.38.

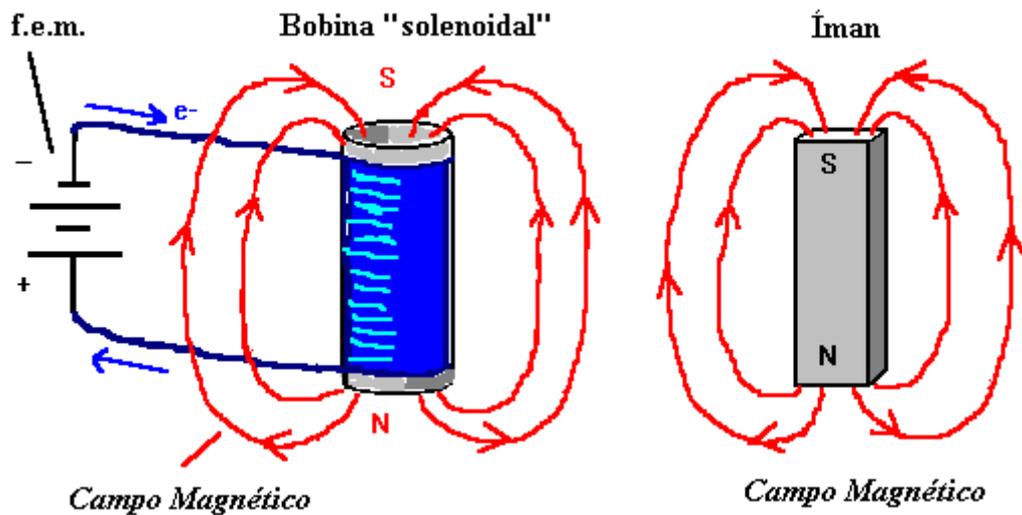


Figura 7.37 – Campos magnéticos gerados por um solenóide e por um íman.

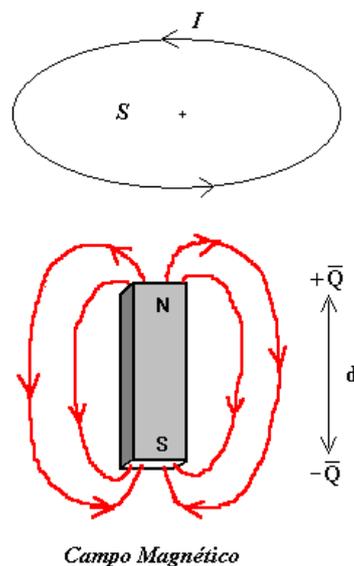


Figura 7.38 – Comparação entre dipolo magnético de um íman e corrente eléctrica de uma espira.

## 7.4 Equações de Maxwell (campos estacionários)

Iremos agora estabelecer e sintetizar as equações que regem os campos eléctricos e magnéticos estacionários no tempo, isto é, que não variam no decorrer do tempo. Situação nomeada de campos electrostáticos e magnetostáticos.

### 7.4.1 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes é expresso pela seguinte equação;

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{Sup} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \quad (7.30)$$

e afirma o seguinte: a circulação ao longo de uma curva fechada  $\Gamma$  (integral de linha) do campo vectorial  $\vec{A}$  é igual ao fluxo do rotacional desse mesmo campo vectorial  $\vec{A}$  na superfície limitada pela curva  $\Gamma$ .

#### 7.4.1.1 Operador Rotacional

O rotacional de um campo vectorial  $\vec{A}$  é expresso por  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  (*rot*  $\vec{A}$  ou *curl*  $\vec{A}$ ) (em coordenadas cartesianas) é igual a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (7.31a)$$

desenvolvendo o determinante, vem:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad (7.31b)$$

O rotacional num ponto  $p$  do espaço, dá-nos a máxima circulação elementar de um campo vectorial por unidade de área. A direcção do rotacional é perpendicular ao plano onde se atinge essa máxima circulação (figura 7.39).

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_p = \lim_{\substack{[\Gamma] \rightarrow p \\ (\Delta S \rightarrow 0)}} \frac{\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \vec{u}_{\max} \quad (7.31c)$$

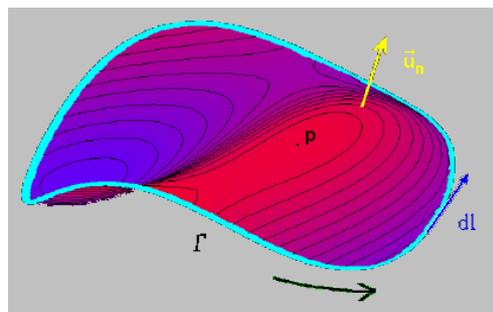


Figura 7.39 – Circulação e Rotacional de um campo.

**O rotacional mede o efeito rotativo ou de encurvamento de um campo.**

## 7.4.2 Aplicação do Teorema de Stokes

Se aplicarmos o teorema de *Stokes* à circulação do campo eléctrico  $\vec{E}$ , e sabendo nós que:

$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , obtemos então:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{Sup} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.32a)$$

implicando obviamente que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (7.32b)$$

Esta é uma das equações de *Maxwell* (para o campo electrostático). Isto significa que o **campo electrostático é irrotacional**. O rotacional de um campo vectorial que é definido a partir do gradiente de uma função escalar – é sempre nulo –  $\vec{\nabla} \times (-grad V) = 0$ .

Se aplicarmos o mesmo teorema de *Stokes* à circulação da indução magnética  $\vec{B}$ , e relacionando este com a densidade de corrente  $\vec{J}$ , obtemos;

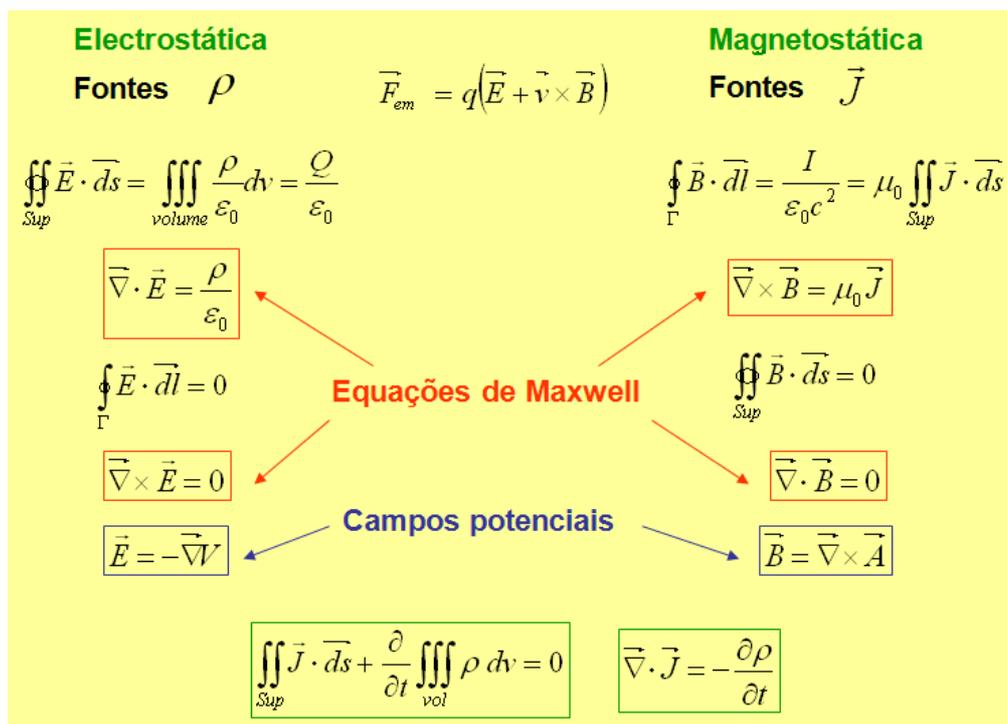
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iint_s (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \quad (7.33a)$$

vindo que;

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{J} \quad (7.33b)$$

Esta é também uma das equações de *Maxwell* (para o campo magnetostático).

Todas estas equações podem ser resumidas no seguinte quadro:



## 7.5 Magnetismo na matéria e suas propriedades

### 7.5.1 Permeabilidade e Susceptibilidade Magnética

No vácuo a relação entre a indução magnética  $\vec{B}$  e o campo magnético  $\vec{H}$ , é dada pela permeabilidade magnética (do vácuo);

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

com  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$

A resposta em termos magnéticos dos nossos materiais é muito diferente. O que observamos é que;

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (7.34)$$

onde  $\mu_r$  é a **permeabilidade magnética** relativa do material (em relação ao vácuo), e que está relacionada com a **susceptibilidade magnética**  $\chi_m$  (grandeza adimensional), por;

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (7.35)$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$  é a permeabilidade magnética absoluta do material.

Na tabela seguinte podemos analisar os valores de susceptibilidade magnética de variados materiais.

Tabela 7.2 – Susceptibilidade magnética de alguns materiais.

Material	$\chi_m$	Temp. de Curie ( °C)
Vazio	0	
Água	$-1,2 \times 10^{-5}$	
Carbono	$-2,1 \times 10^{-5}$	
Oxigénio	$0,19 \times 10^{-5}$	
Alumínio	$2,2 \times 10^{-5}$	
Ferro	>200	774
Cobalto	70	1131
Níquel	110	354

A **temperatura do ponto de Curie**, é a temperatura a partir da qual o material deixa de exibir as suas propriedades ferromagnéticas.

Vejamos então o significado destes valores expressos na tabela 2.1 e os vários tipos de acções magnéticas exibidas pelos materiais.

## 7.5.2 Materiais Magnéticos

Já sabemos que a permeabilidade magnética do vácuo é  $\mu_0$ , valor que pode também ser usado para caracterizar o ar ( $\mu_{ar} \approx \mu_0$ ). Sabemos também que correntes eléctricas estacionárias geram campos magnetostáticos, tendo-se mostrado as equações que descrevem a magnitude desses campos para diferentes formas de circuitos. Devido à constituição da matéria em átomos e da própria organização destes num núcleo atómico e nuvem electrónica, as cargas em movimento ou oscilação – produzem desse modo um efeito magnético. Sumariamente, podemos pensar no movimento orbital dos electrões em torno do núcleo – é equivalente a uma corrente eléctrica – *correntes moleculares de Ampère* – que origina um infinitésimo momento magnético (pequeno íman). Analogamente a rotação do próprio electrão (spin) também origina um efeito magnético. O núcleo atómico contribui também (mas com muito menor intensidade) para o efeito magnético dos materiais.

Não será também de admirar que as propriedades magnéticas da matéria possam ser alteradas pela presença de um campo magnético exterior e que este possa ser modificado pela presença dessa mesma matéria.

Assim sendo, se colocarmos uma amostra de um material num campo magnético, o campo na sua vizinhança é alterado. A modificação observada depende da natureza do material em si e também da sua forma. Para alguns materiais, as modificações observadas no campo magnético são mínimas, mas para outros o campo pode aumentar por um factor que pode ser da ordem de  $10^2$  vezes relativamente ao campo magnético na ausência desse material. Tais materiais são designados por **ferromagnéticos**, de que são exemplo o Ferro, o Níquel, o Cobalto e algumas ligas. O materiais que não têm esse comportamento magnético tão acentuado são designados de **não-ferromagnéticos** e estão divididos em: **diamagnéticos**, de que são exemplo, o Cobre, o Ouro, o Nitrogénio, o Hélio, o vidro e **paramagnéticos**, de que são exemplo, o Vanádio, o Manganésio, o Titânio, a Platina, o Alumínio, o Oxigénio, ligas de Crómio, (figura 7.40). Um determinado material ferromagnético torna-se paramagnético se a sua temperatura for superior à temperatura de Curie.

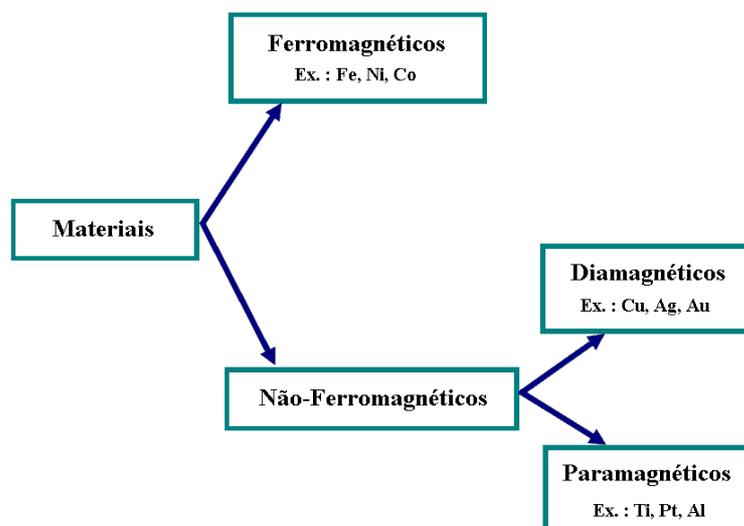


Figura 7.40 – Classificação magnética dos materiais.

As expressões 7.34 e 7.35, e em particular o valor da susceptibilidade magnética, é que dita o tipo de comportamento e de material magnético. A intensidade do campo de indução magnética  $B$  no interior de um meio material depende desse parâmetro que o caracteriza.

### 7.5.2.1 Materiais Diamagnéticos

Denominam-se **diamagnéticos** os materiais que não possuindo magnetização (sob um campo magnético nulo), apresentam uma magnetização contrária ao campo magnético aplicado exteriormente. Assim sendo, a susceptibilidade magnética  $\chi_m$  destes materiais é sempre negativa (e próxima de zero), tabela 7.3. Deste modo, o campo de indução magnética no interior de um meio diamagnético é menor que o campo indução magnética no vazio, figura 7.41. Este magnetismo resulta exclusivamente do movimento orbital do electrão e ocorre em todos os materiais. O seu efeito é muito pequeno.

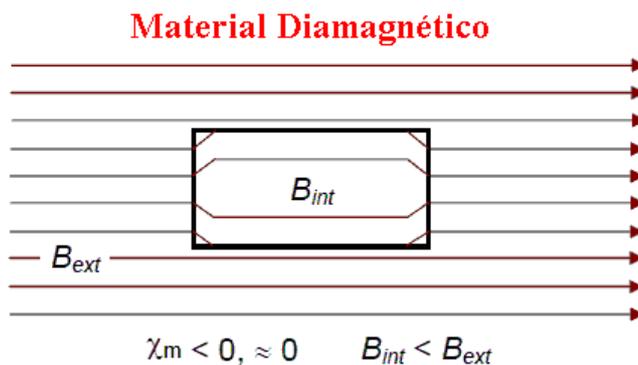


Figura 7.41 – Linhas de campo no interior de um material diamagnético.

### 7.5.2.2 Materiais Paramagnéticos

São paramagnéticos os materiais que não possuindo magnetização (sob um campo magnético nulo), apresentam magnetização no mesmo sentido do campo aplicado exteriormente. A susceptibilidade magnética  $\chi_m$  destes materiais é positiva mas próxima de zero, tabela 7.3. Deste modo, o campo de indução magnética no interior de um meio paramagnético é ligeiramente superior ao campo de indução magnética no vazio, figura 7.42. Resulta do spin dos electrões, que quando sujeitos a um campo magnético exterior, tendem a alinha-se com este, aumentando o efeito magnético observado. Para haver este alinhamento, tem de previamente já existir um dipólo magnético instalado, o que só acontece em átomos ou moléculas orbitalmente desemparelhados.

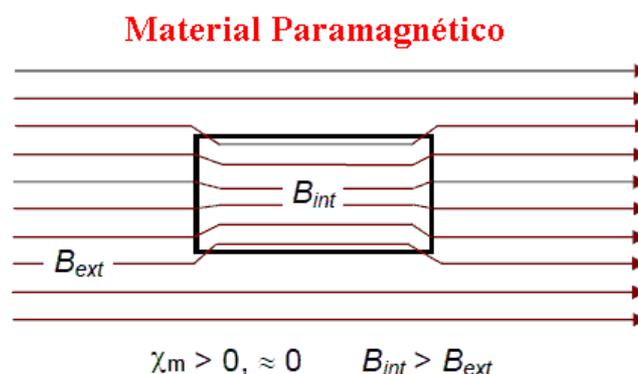


Figura 7.42 – Linhas de campo no interior de um material paramagnético.

Tabela 7.3 – Susceptibilidade magnética de alguns materiais diamagnéticos e paramagnéticos.

Material	$\chi_m$
Hélio	-1,9
Néon	-7,2
Cádmio	-0,18
Cobre	-0,086
Prata	-0,20
Alumínio	0,65
Cálcio	1,10
Platina	1,10

### 7.5.2.3 Materiais Ferromagnéticos

Existem, como já referimos logo no início deste capítulo, substâncias que apresentam uma magnetização própria permanente – materiais ditos ferromagnéticos. Para estes materiais o valor de  $\chi_m$  é positivo e muito superior a 1 (para o Ferro e outros materiais fortemente ferromagnéticos pode ser da ordem de  $10^3$ ), sendo, por isso, o campo de indução magnética no interior de um meio ferromagnético muito superior ao campo de indução magnética no vazio, figura 7.43 e tabela 7.4. Este magnetismo resulta de nalguns materiais o alinhamento dos spins dos electrões pode ser de tal forma, que se influenciam mutuamente, originando pequenos domínios, onde a orientação de todos é semelhante e permanente, mas diferente de domínio para domínio. Quando na presença de um campo magnético exterior, são estes domínios como um todo que se reorientam, no sentido do campo – efeito **Ferromagnético**, ou no sentido oposto – efeito **Anti-Ferromagnético**.

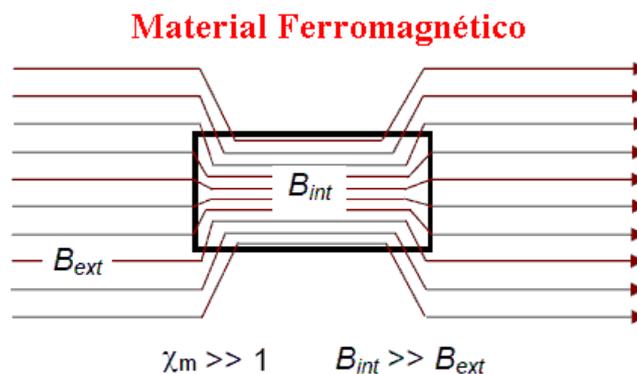


Figura 7.43 – Linhas de campo no interior de um material ferromagnético.

Tabela 7.4 – Susceptibilidade magnética de alguns materiais ferromagnéticos.

Material	$\chi_m$
45 Ni-55 Fe (permalloy 45)	2.700
75 Ni-5 Cu-2 Cr- 18 Fe (mumetal)	30.000
79 Ni-5 Mo-15 Fe-0.5 Mn (mupermalloy)	100.000
Fe <sub>78</sub> B <sub>13</sub> Si <sub>9</sub> (% atómica)	600.000
Co <sub>66</sub> Fe <sub>4</sub> Ni <sub>1</sub> B <sub>14</sub> Si <sub>15</sub> (% atómica)	1.000.000
Fe <sub>67</sub> Co <sub>18</sub> B <sub>14</sub> Si <sub>1</sub> (% atómica)	4.000.000

Existem ainda, como acabamos de referir, variações a estes materiais ferromagnéticos, mais concretamente os materiais **anti-ferromagnéticos** e os **ferrimagnéticos**, (figura 7.44). As diferenças são que nos **materiais ferromagnéticos**, em todos os seus domínios (grupos de átomos) os momentos magnéticos têm a mesma intensidade e estão orientados paralelamente e no mesmo sentido (ex. Ferro e Cobalto). Nos **materiais anti-ferromagnéticos**, os momentos magnéticos dos domínios magnéticos vizinhos têm a mesma intensidade, mas estão orientados no sentido oposto (anti-paralelos). São exemplos, a hematite ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) e os óxidos de manganésio, de ferro, de cobalto e de níquel. Nos **materiais ferrimagnéticos**, os momentos magnéticos dos domínios magnéticos vizinhos são também anti-paralelos, mas têm uma intensidade diferente. A magnetite ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) é um exemplo deste tipo de material, sendo o mineral mais importante no contributo para o magnetismo das rochas na crosta terrestre.

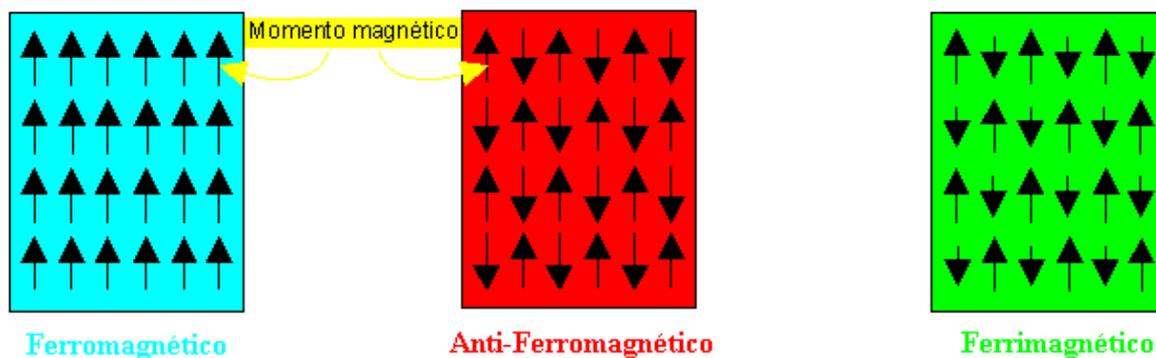


Figura 7.44 – Orientação dos momentos magnéticos nas substâncias ferromagnéticas.

## 7.6 Campo Magnético da Terra

A existência do campo magnético da Terra (CMT) é conhecida, como vimos, desde o tempo de *Gilbert*, que em 1600 propôs no seu livro “*De Magnete*” que a Terra fosse considerada equivalente a um gigantesco íman permanente. Mesmo sem uma prova e fundamentação disso, o CMT foi utilizado para orientação desde o tempo dos chineses e principalmente na época dos descobrimentos. A teoria físico-matemática capaz de o descrever e justificar o CMT só foi alcançada com *Maxwell* (como veremos), nos finais do século XIX e os primeiros modelos “realistas” do mecanismo gerador do campo só actualmente começam a ser construídos. A prova matemática de que o campo magnético observado à superfície tem como origem fundamental a Terra (e não fenómenos externos a esta) foi obtida por *Gauss* em 1838. Já nessa altura se tinha concluído que o CMT manifestava uma certa variação secular, e de que as variações rápidas do CMT tinham correlação com fenómenos atmosféricos como as auroras boreais observadas nos locais de elevada latitude.

### 7.6.1 Breve descrição da evolução do conhecimento do campo magnético terrestre

Foi inicialmente suposto que a bússola apontava para o norte verdadeiro, e as primeiras observações em que se verificou o desvio foram atribuídas a imperfeições instrumentais. No século XV tornou-se evidente um desvio sistemático do norte verdadeiro. Esta descoberta introduz uma verdadeira revolução na arte de navegar e viajar, permitindo um “risco menor” na arte de marear. As *alidades solares* de 1450 (tabelas de posição do sol) já traziam a indicação da direcção da declinação magnética a que os marinheiros anglo-saxões chamavam variação, também alguns mapas de estradas datadas do final do séc. XV trazem indicações desse tipo. Posteriormente, em 1544, *Hartmann* observou que a agulha magnética se inclinava, e em 1581, *Norman* publica a descoberta, fazendo a primeira medição da

inclinação magnética. A descoberta destas propriedades do magnete dá origem a uma nova ciência, o geomagnetismo. *Gellibrand* em 1635 descobre que o magnetismo da Terra evolui no tempo, com uma taxa de variação “superior à da evolução geológica da superfície”, completando assim as observações de *Gilbert* e acrescentando-lhe a variação secular.

A primeira série de medições de exploração da declinação magnética com fins náuticos foi feita por João de Castro, que apresentou os resultados obtidos em 43 locais da costa ocidental da Índia e no Mar Vermelho (1538-1541). A primeira viagem realizada propositadamente para efectuar um levantamento magnético foi dirigida por *Edmund Halley* (1698-1700), que publicou em 1701 a primeira carta magnética do Atlântico. Só posteriormente foram publicadas as referentes ao Índico e aos mares da China. A primeira carta da inclinação do campo magnético terrestre foi traçada em 1768. Mas foi a partir dos trabalhos de *Gauss*, em 1832, que foram conhecidos os primeiros valores da intensidade da força magnética à superfície da Terra. *Von Humboldt* verificou que esta intensidade diminuía com a latitude.

Em 1731 *Mairan* admite que as auroras deveriam observar-se nos dois hemisférios da Terra. Posteriores observações confirmaram esta asserção, com a conclusão de ocorrências simultâneas de auroras em ambos os hemisférios. *Muncke* em 1837, observou que embora haja um aumento da frequência de visibilidade de auroras com a latitude, a partir de certa latitude limite ocorre uma diminuição nessa frequência. *Cavendish* em 1874 determinou a altitude da aurora, mas o seu método revelou-se de pouca precisão. Só em 1955, *Stormer*, por processos fotográficos, determina a altura e o plano da posição da aurora. A investigação solar e geomagnética levou à associação das auroras com as perturbações do campo geomagnético, *Celsius* (em *Uppsala*, na Suécia) em 1741 faz essa constatação. *Gauss* inicia as observações da declinação magnética e respectivas variações, generalizando-as às da inclinação e da intensidade total, permitindo-lhe assim conhecer a variação do vector magnético. No seu observatório geomagnético, eram feitas observações de hora a hora. De 1836 a 1841, 50 observatórios faziam leituras visuais, cooperando nos estudos de *Gauss*. O primeiro Ano Internacional Polar 1882/1883 trouxe algumas indicações importantes sobre as perturbações transientes do campo magnético terrestre.

Em Portugal as observações magnéticas iniciam-se em 1860 nos observatórios da Escola Politécnica (actual museu da Faculdade de Ciências de Lisboa) e de Coimbra. O primeiro foi desactivado umas décadas depois e o segundo tem actualmente um funcionamento precário, já não no local original, mas apesar disso o Observatório Magnético de Coimbra continua a ser o nosso único observatório magnético em funcionamento contínuo.

As necessidades do conhecimento das variações temporais do campo magnético terrestre conduziram assim à cooperação científica internacional. 75 anos após o Ano Internacional Polar, o Ano Geofísico Internacional vem completar em muito o conhecimento do campo geomagnético, das auroras e a sua relação com a actividade solar, da ionosfera e dos raios cósmicos. O começo da era espacial, com o lançamento de satélites artificiais veio ampliar em muito os dados existentes, tal como descobrir e melhorar espectacularmente o nosso conhecimento do campo magnético do nosso planeta.

Já desde o século XIX que são conhecidas as relações entre as perturbações no Sol e as perturbações do campo magnético da Terra. Após se observar uma explosão solar (protuberância solar) é observada na Terra um dia depois, uma tempestade magnética de começo súbito. A velocidade de propagação das partículas é pois da ordem de  $1500 \text{ kms}^{-1}$ . Também a emissão de gás solar da coroa solar, a centenas de  $\text{kms}^{-1}$  produz perturbações no campo geomagnético que são praticamente diárias.

## 7.6.2 Breve descrição do campo magnético terrestre (CMT)

A utilização da bússola como instrumento de localização e orientação sobre a Terra, parte do princípio de que o CMT se aproxima do campo magnético gerado por um ímã permanente alinhado com o eixo de rotação, onde é possível distinguir um “Polo magnético norte”, um “Polo magnético sul” e um “Equador magnético”, à semelhança do que ocorre com as referências geográficas (figura 7.45). Neste sentido, podemos falar de **meridiano magnético** como a projecção, na superfície da Terra, das linhas de força do Campo Magnético. A **declinação** pode ser definida como o ângulo que em cada ponto o meridiano geográfico (linha geográfica norte-sul) faz com o meridiano magnético (figura 7.47). A **inclinação** é o ângulo dessas linhas de força com o plano que é tangente à Terra no ponto de observação, (figura 7.49). Uma inclinação de  $90^\circ$  corresponde ao pólo magnético norte, da mesma maneira que uma inclinação de  $-90^\circ$  corresponde ao pólo magnético sul. O equador magnético é constituído pelo conjunto de pontos de inclinação nula (figura 7.49). De notar que embora o CMT se possa considerar como aproximadamente dipolar, o eixo magnético não coincide em regra com o eixo geográfico e - o que é o mesmo - os pólos magnéticos afastam-se sensivelmente dos pólos geográficos, figura 7.45.

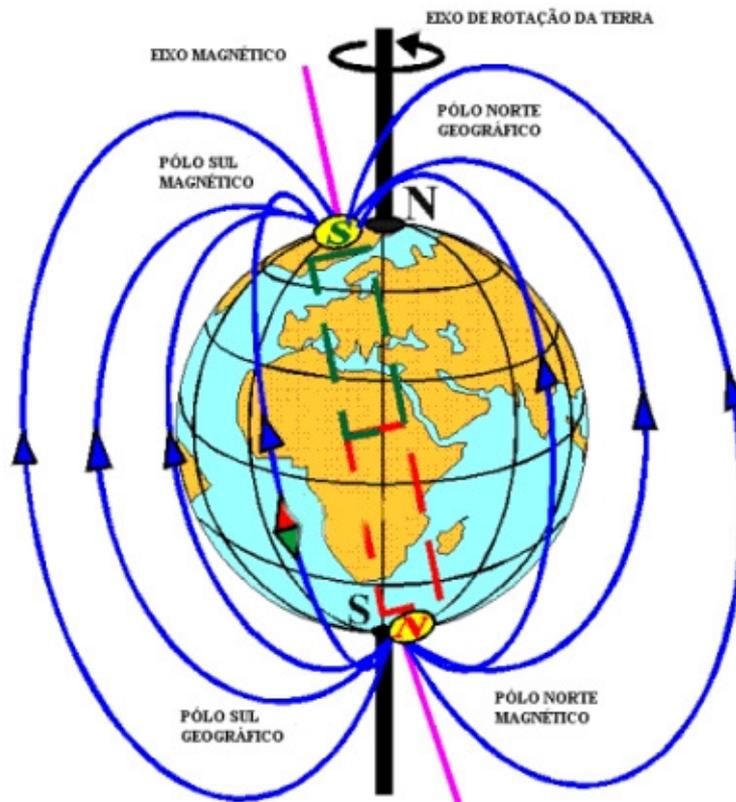


Figura 7.45 – Representação pictórica do campo magnético terrestre.

Sendo o CMT um campo vectorial (existe no espaço 3D), a sua medição exige o conhecimento da sua amplitude e dos dois ângulos - declinação e inclinação - ou a medição das suas três componentes num referencial conhecido (precisamos de conhecer sempre 3 valores). Para além disso, as medições são constantemente efectuadas na “quarta dimensão”, isto é, no tempo e ao longo deste. É habitual utilizar-se um referencial cartesiano local para cada ponto de observação, em que o eixo dos ZZ coincide com a vertical (positivo para cima), o eixo dos XX com o meridiano geográfico (positivo para norte) e o eixo dos YY com um paralelo (positivo para este). A componente vertical do campo magnético é habitualmente designada por Z, a componente sul-norte por X e a componente oeste-este por Y, figura 7.46.

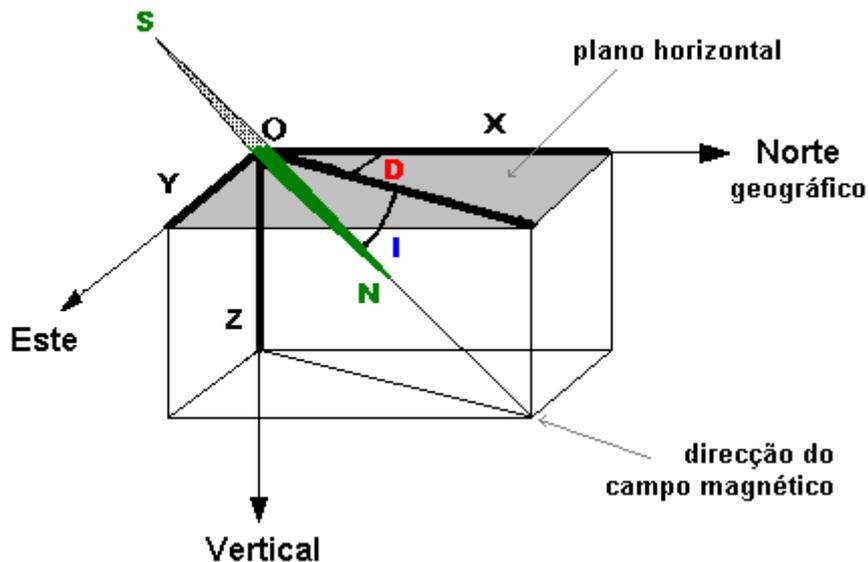


Figura 7.46 – Referencial local e componentes do campo magnético terrestre.

Nas figuras 7.47 e 7.49, estão representados valores modelados, respectivamente, da declinação e inclinação magnética, resultantes das contínuas observações do campo magnético nos observatórios geomagnéticos mundiais e também de observações efectuadas por satélites artificiais. Para a nossa localização, podemos constatar que a declinação (no ano de 2005) é de  $-4^\circ$  ( $4^\circ$  oeste), isto é, a bússola aponta  $4^\circ$  para oeste em relação ao norte geográfico (figura 7.48). Esta declinação varia no tempo, e com base nas observações, sabemos qual a variação média do ângulo de declinação, para cada local da Terra.

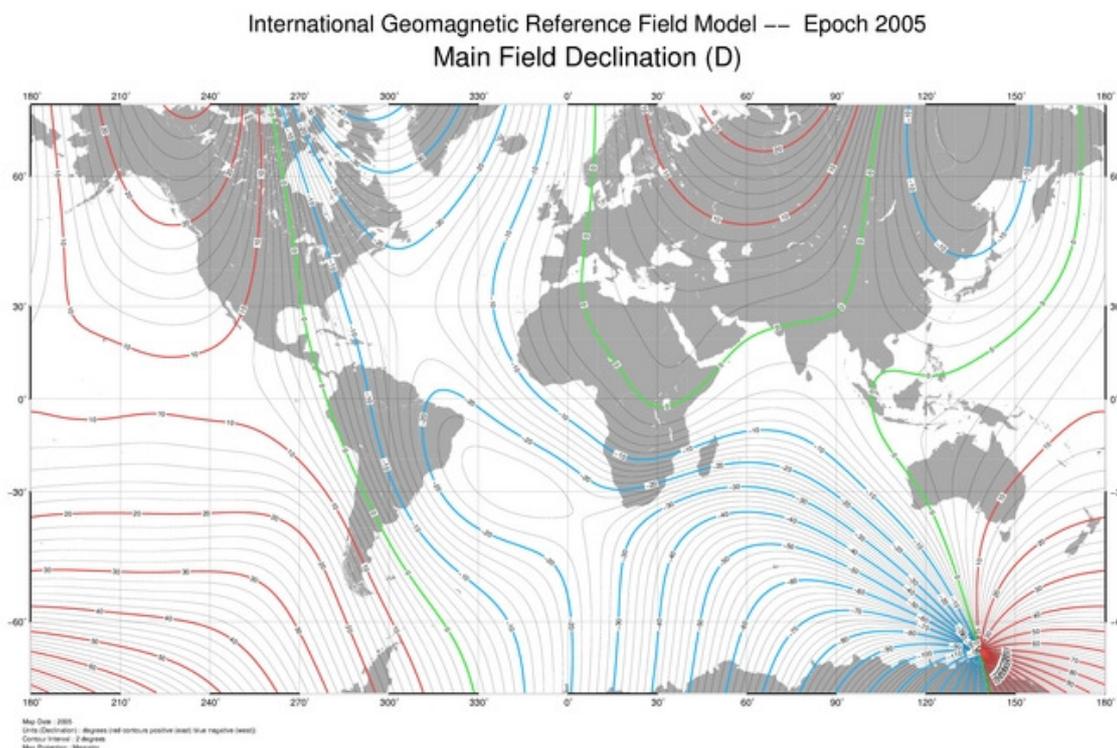


Figura 7.47 – Declinação magnética (modelo do CMT – 2005).

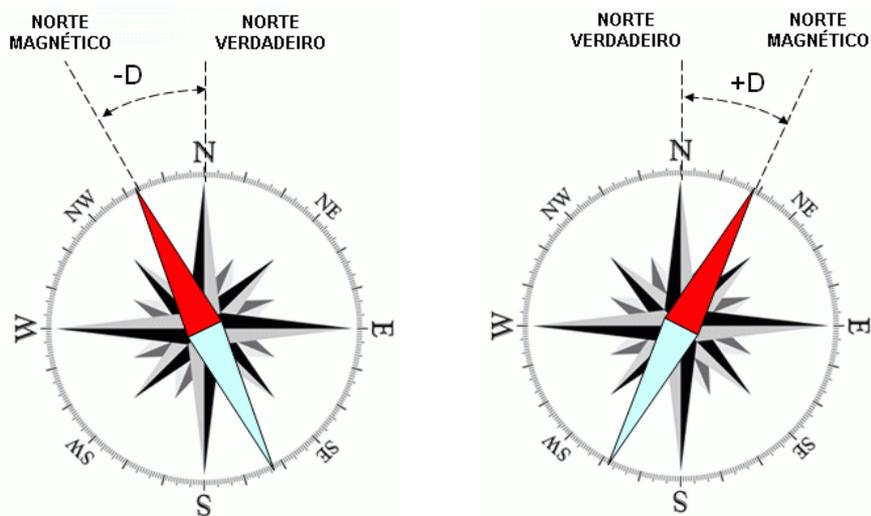


Figura 7.48 – Definição de ângulo de Declinação magnética.

Igualmente para a nossa localização, podemos constatar que a inclinação (no ano de 2005) é de  $54^\circ$ . A inclinação tem uma variação muito pequena e lenta no tempo, quando comparada com a variação da declinação. As nossas normais bússolas são construídas para nos indicar unicamente a linha norte-sul magnético. Temos de previamente saber o valor de declinação magnética para determinar o verdadeiro norte geográfico. Essas bússolas não são apropriadas para a medição da inclinação magnética, embora nos apercebamos nestas, da inclinação da agulha. Podemos também constatar que o “equador magnético” se encontra praticamente a norte do equador terrestre, o que denuncia uma excentricidade no “dipolo magnético”, não estando este centrado com a Terra.

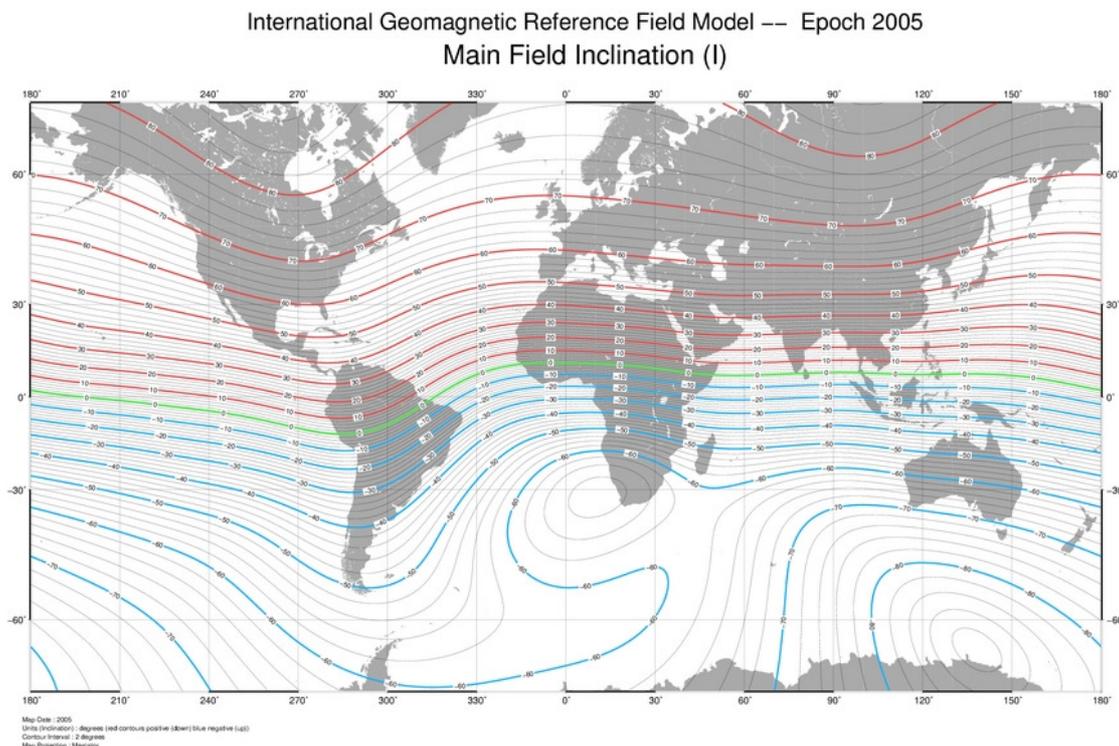


Figura 7.49 – Inclinação magnética (modelo do CMT – 2005).

International Geomagnetic Reference Field Model — Epoch 2005  
Main Field Total Intensity (F)

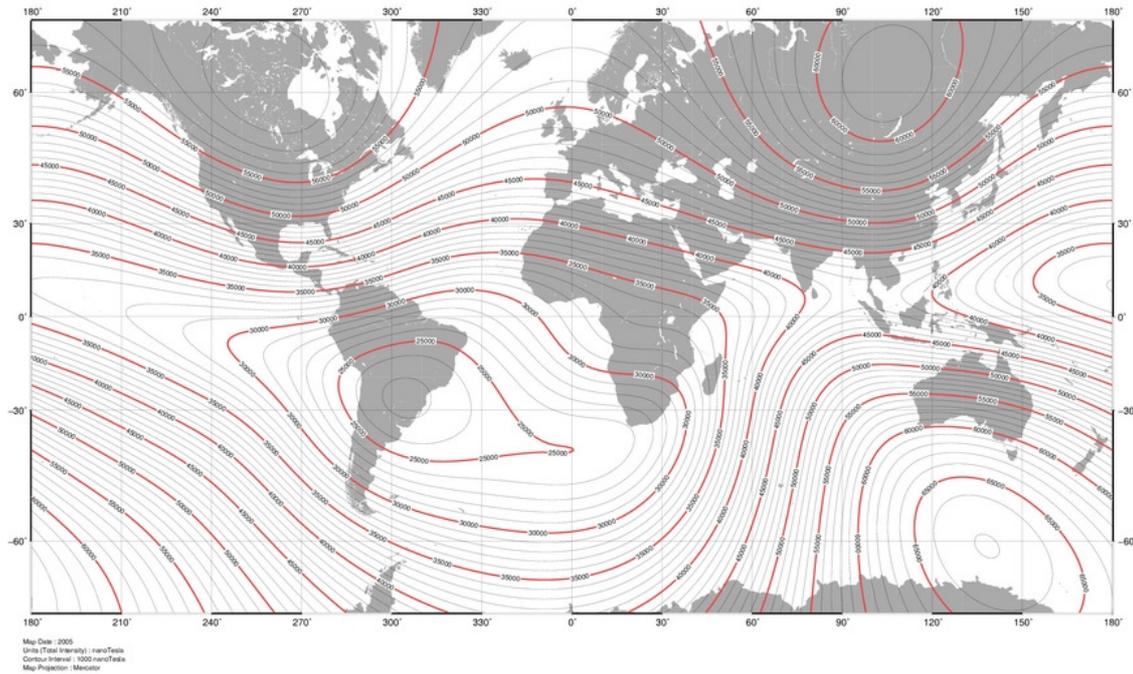


Figura 7.50 – Intensidade de indução magnética (modelo do CMT – 2005).

No que à intensidade do campo de indução magnética diz respeito, esta varia bastante, desde as zonas equatoriais até aos pólos terrestres (figura 7.50). Tem o valor máximo de 67.000 nT junto ao pólo sul magnético e 61.000 nT no correspondente pólo norte magnético. Tem um valor mínimo na zona sul do Brasil, com cerca de 23.000 nT apenas (a chamada anomalia magnética do Atlântico sul). Na nossa região de Tomar, a intensidade do campo de indução magnética é de 44.000 nT ( $44 \times 10^{-6}$  T).

### 7.6.3 Fontes do campo magnético terrestre

O campo e as variações magnéticas observadas à superfície da Terra têm uma origem múltipla. Podemos considerar as **fontes internas** (à Terra) e as **fontes externas**, basicamente com origem no Sol.

Podemos dividir as fontes internas em duas origens; a resultante da magnetização dos materiais existentes na **crosta terrestre** e a da acção profunda do **núcleo terrestre**. Esta componente profunda exhibe um campo intenso e abrangente a todo o planeta, e tem uma expressão maioritariamente dipolar. Resulta de um “efeito de dínamo auto-sustentado” e a sua dinâmica e explicação ainda não está perfeitamente explicada e compreendida. A origem desta magnetização reside no movimento do fluido em estado líquido que constitui o núcleo exterior da Terra, fluido esse constituído basicamente por ferro e níquel. A dinâmica deste sistema interno exhibe variações de longo período, tanto na “posição do dipolo” (localização dos pólos magnéticos), conhecida como **variação secular** (figura 7.51), como na intensidade do campo (figura 7.52).

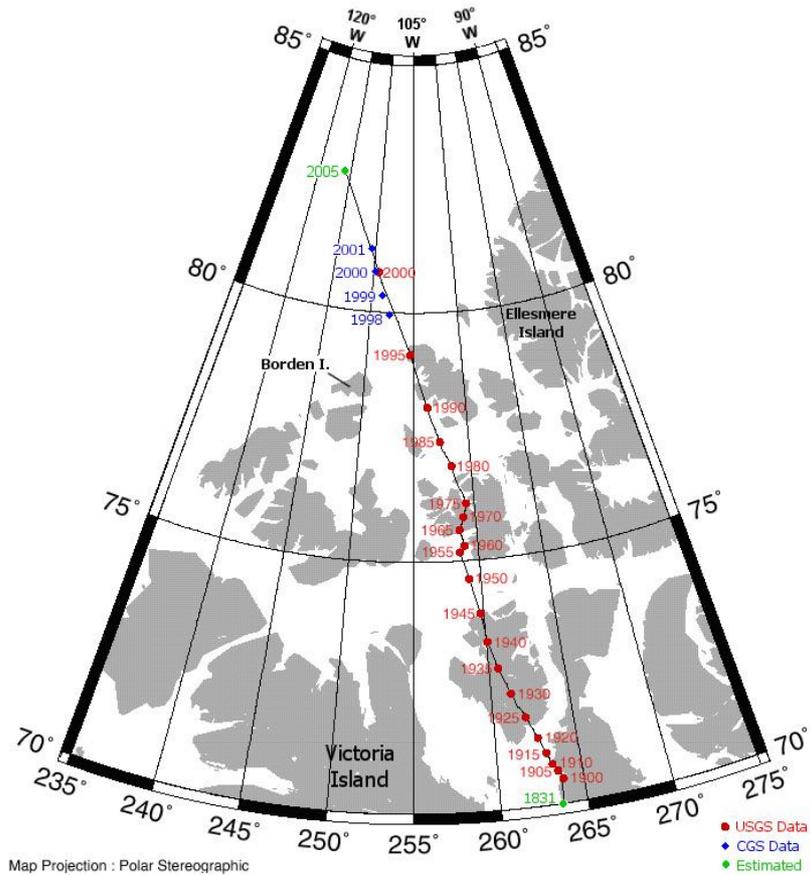


Figura 7.51 – Variação da posição do pólo norte do CMT (1831-2005).

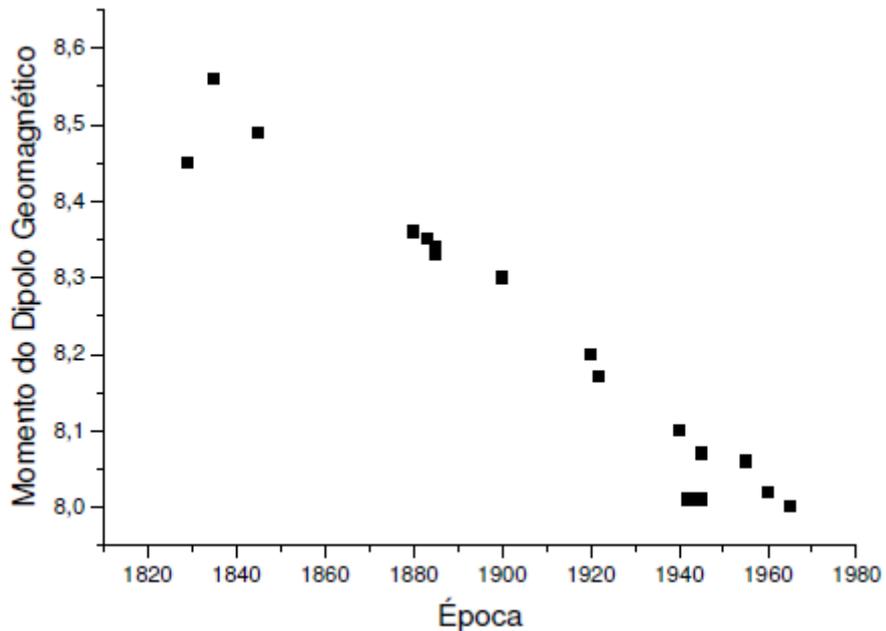


Figura 7.52 – Variação do Momento do Dipolo do CMT (1830-1965), unidades:  $10^{22} \text{ Am}^{-2}$ .

Existe um fluxo contínuo de plasma proveniente do Sol, constituído por átomos de hidrogénio ( $500 \text{ cm}^{-3}$ ), iões  $\text{H}^+$ ,  ${}^4\text{He}^{2+}$  e electrões ( $10 \text{ cm}^{-3}$ ) que constitui o chamado **vento solar**. À distância média da Terra ao Sol, este fluxo gera um campo de indução magnética com uma intensidade próxima de 5 nT.

O CMT é afectado profundamente por este vento solar. No lado “iluminado”, as linhas de força do CMT são “comprimidas” pelo vento solar, definindo uma cavidade na qual a penetração do vento solar é muito reduzida, e onde o CMT fica confinado. Do lado “não iluminado” a fronteira da magnetosfera, denominada magnetopausa, apresenta uma forma alongada, geometricamente semelhante à cauda de um cometa, figura 7.53.

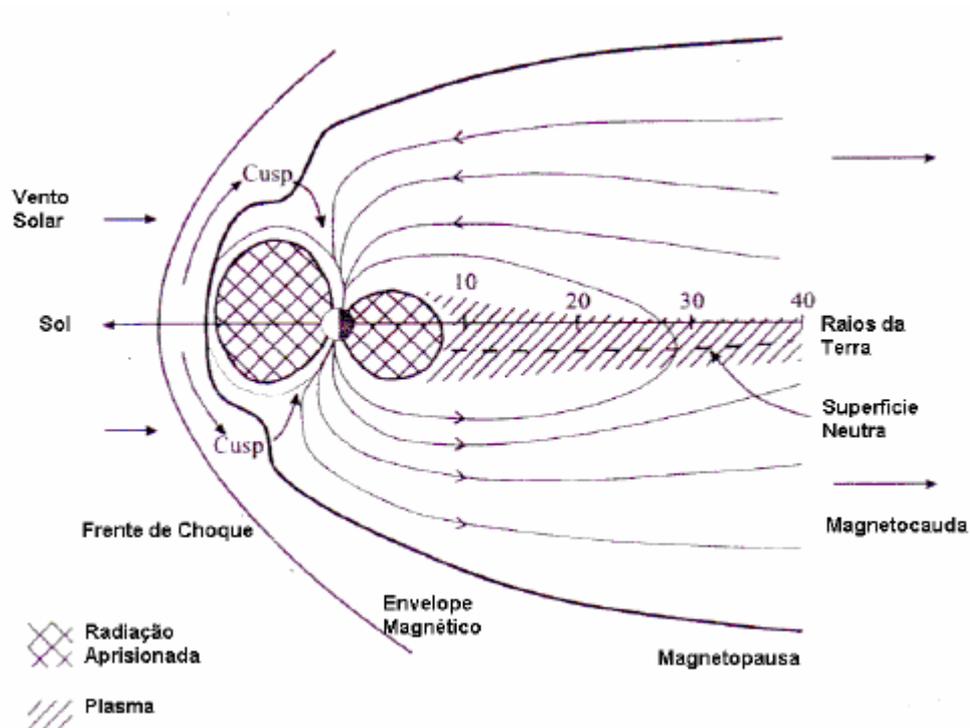


Figura 7.53 – Estrutura da Magnetosfera terrestre.

Todos estes mecanismos descritos para a origem do campo magnético geram, à superfície da Terra, um sinal magnético com uma grande dependência temporal. As variações do campo magnético produzidos pela radiação solar são da ordem de grandeza de  $10^{-15}$  s. A componente de 1 kHz corresponde às ondas induzidas no plasma ionosférico por relâmpagos, com sinais de alguns nT (conhecidos como *whistlers* - assobios). Nos períodos entre 1 e 300 s são conhecidas variações do CMT de carácter global e quase periódico, denominadas micropulsações, que se podem manter durante algumas horas e cuja amplitude é inferior a alguns nT. Correspondem a fenómenos de ressonância da magnetosfera induzidos pelo vento solar.