ELECTROMAGNETISMO

Curso de Electrotecnia e de Computadores

1º Ano – 2º Semestre **2010-2011**

Capítulo IV – Potencial Eléctrico

4.1 Trabalho e Potencial Eléctrico

4.1.1 Trabalho e Energia Potencial Eléctrica

Consideremos uma carga eléctrica pontual positiva fixa ($Q > 0$ C) e campo eléctrico por ela produzida no Universo. Se uma carga eléctrica de prova também positiva ($q > 0$ C) viajar desde o infinito até uma posição distante de a da carga Q, sobre ela foi realizado um trabalho (negativo), pois a carga de prova esteve sujeita a uma força eléctrica de interacção e deslocou-se no espaço, ao longo de um percurso.

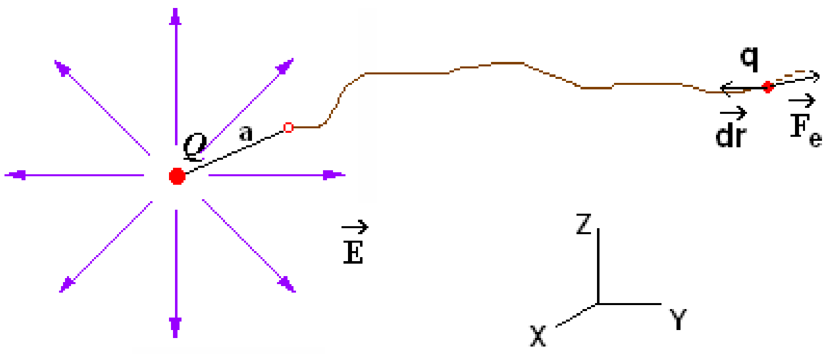


Figura 4.1 – Trajectória de uma carga pontual positiva q, sob a acção de um campo eléctrico.

Este trabalho realizado (expressão 4.1) é independente da trajectória seguida (o campo eléctrico é conservativo). Como resultado a energia assim transferida é armazenada no sistema de duas cargas, ficando assim disponível. A energia representada na expressão depende unicamente das suas cargas e da distância que as separa – é uma energia de posição, energia potencial – **Energia Potencial Eléctrica**.

$$W = \int_{\infty}^{a} -\vec{F}_e \cdot \vec{dr} = \int_{a}^{\infty} \vec{F}_e \cdot \vec{dr} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{\infty} \qquad (4.1)$$

O trabalho negativo realizado pela força eléctrica de interacção, significa efectivamente que não foi devido a essa força que a carga positiva foi trazida para junto da carga positiva geradora do campo. Tivemos que **aplicar uma força externa**, para passo a passo, equilibrando a força eléctrica, trazer a carga q desde o infinito até à distância a da carga Q. Assim, a força externa aplicada é $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_e$, e é o **trabalho realizado por essa força** que é transferido para o sistema de duas cargas sob a forma de **Energia Potencial Eléctrica**.

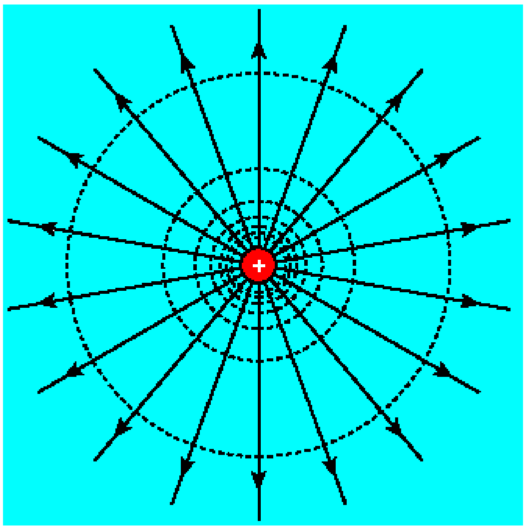
$$E_{PE} = W = \int_{\infty}^{a} -q\vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = q\int_{a}^{\infty}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{4.2}$$

4.1.2 Trabalho e Potencial Eléctrico

Se dividirmos agora esta energia potencial pelo valor da carga q, obtemos uma quantidade que é a energia por unidade de carga, a qual chamamos de:
Potencial Eléctrico de Q à distância a.

$$V(x,y,z) = \int_{\infty}^{a} -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{4.3}$$

O **Potencial Eléctrico** originado no espaço, por uma carga Q a uma distância r é:



$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = k_0\frac{Q}{r}} \tag{4.4}$$

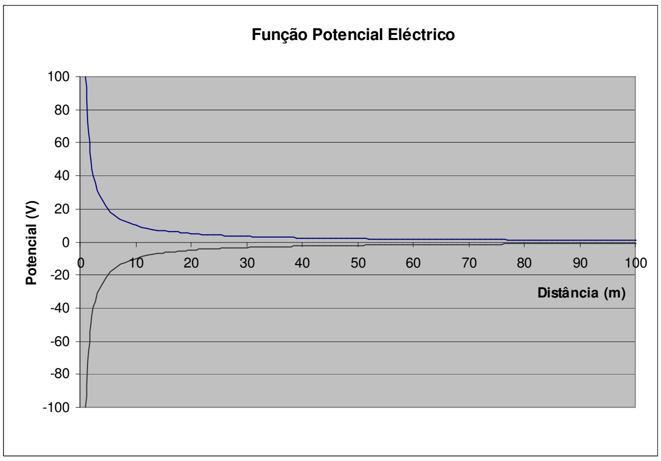
É um valor escalar e quantificamo-lo na unidade de V (*Volt*) (JC^{-1}).

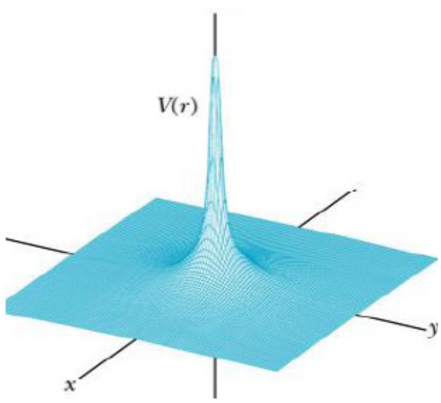
Significado físico:
"O Potencial Eléctrico num qualquer ponto é igual ao trabalho necessário, por unidade de carga, para deslocar uma carga de prova positiva desde o infinito até ao ponto considerado".

Figura 4.2 – Representação (no plano da folha) de linhas do campo eléctrico e linhas de potencial eléctrico, de uma carga eléctrica pontual positiva.

Analisando a expressão (4.4), concluímos que a função **Potencial**;

1º - tem simetria radial (esférica) (fig. 4.2),
2º - toma o valor nulo no infinito (fig. 4.3),
3º - tem uma singularidade no local da carga (Q) criadora do campo (fig. 4.3),
4º - é positivo se a carga Q é positiva e é negativo se a carga Q é negativa (fig. 4.3a).





a) b)
Figura 4.3 – a) Potencial eléctrico de carga pontual positiva e negativa
(de igual módulo), em função da distância. b) Forma da função potencial de uma carga pontual.

4.1.3 Potencial Eléctrico de um sistema de cargas pontuais

Se tivermos uma distribuição discreta de n cargas pontuais (q_i), então o potencial eléctrico (V) produzido num qualquer ponto P do espaço de coordenadas (x,y,z), será (por aplicação do principio da sobreposição):

$$\mathrm{V}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} \qquad (4.5)$$

"O potencial eléctrico num ponto do espaço é a soma algébrica do potencial originado por cada uma das cargas, nesse ponto do espaço"

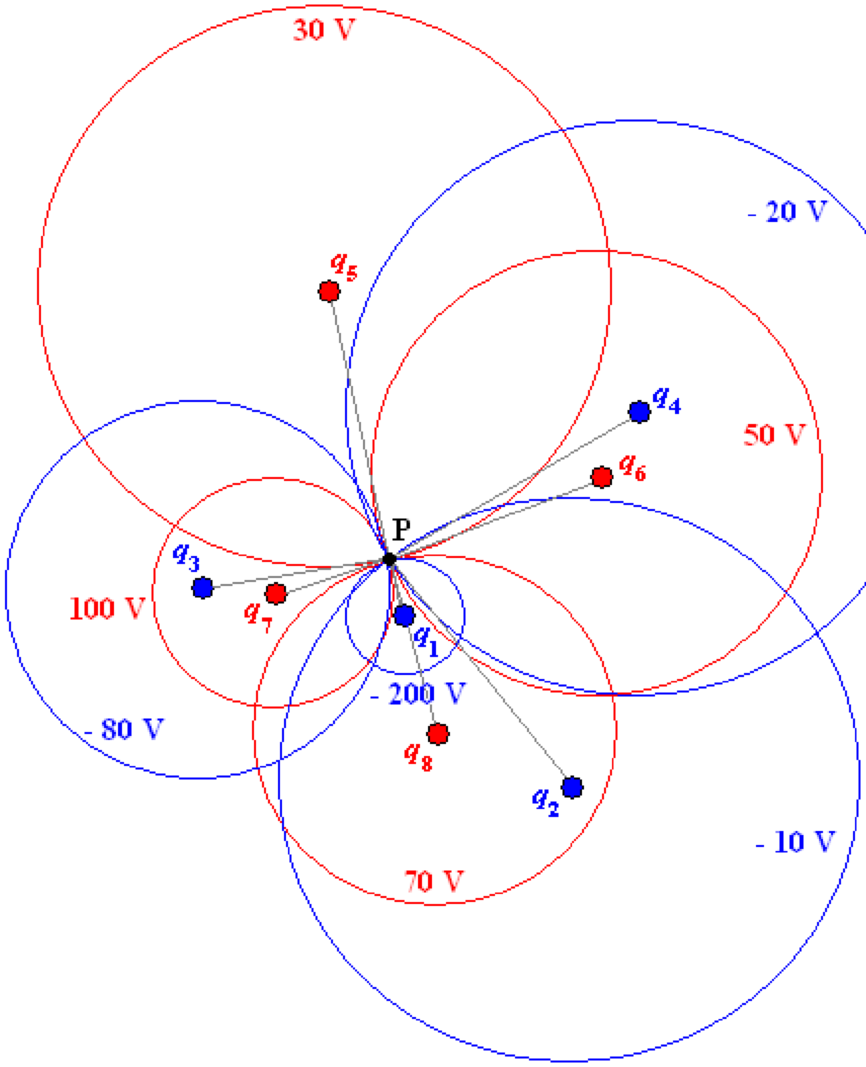


Figura 4.4 – Efeito (potencial eléctrico) de cargas eléctricas pontuais num ponto P do espaço. Qual o valor do potencial eléctrico no ponto P?

Exercício 4.1

Calcule o potencial eléctrico no ponto (2,1,2) m, originado pelas seguintes cargas no vazio; q_1 = +2μC em (0,0,0) m, q_2 = -3μC em (1,-1,1) m e q_3 = +3μC em (2,3,0) m.

4.1.4 Energia de um sistema de cargas eléctricas

Determinação da Energia Potencial Eléctrica de um conjunto de cargas eléctricas pontuais no vazio, devido às suas posições relativas - vamos começar por considerar o trabalho necessário para construir a configuração desse sistema de *n* cargas eléctricas.

Ao trazer do infinito a primeira carga eléctrica (q_1), como não está sob influência de qualquer campo eléctrico, o trabalho realizado é nulo ($W_1 = 0$ J).

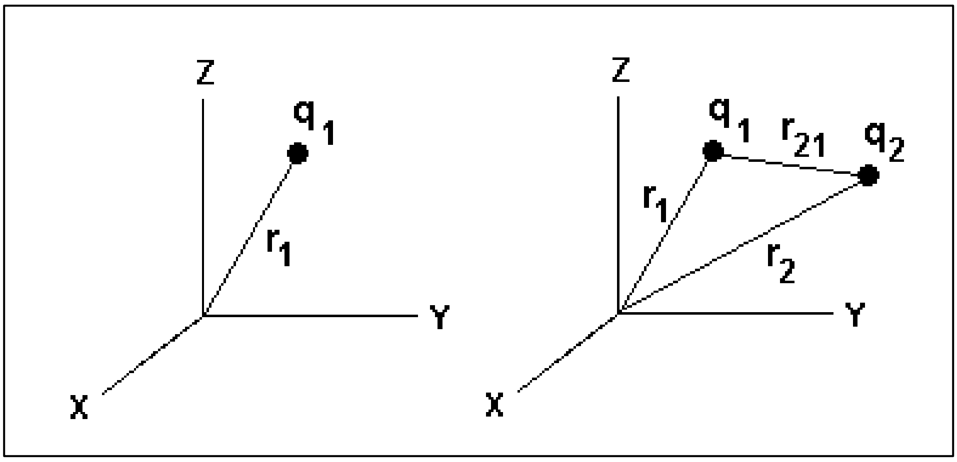


Figura 4.5 – Trabalho e Energia de um sistema de cargas eléctricas pontuais.

A segunda carga eléctrica (q_2), já vai estar sob a influência do campo eléctrico criado pela primeira carga - o trabalho realizado será (pela expressão 4.2), figura 4.5;

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{21}}q_2$$

A terceira carga eléctrica (q_3), já vai estar sob influência do campo eléctrico criado pelas duas cargas anteriores – o trabalho realizado será então;

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{31}}q_3 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{32}}q_3$$

Generalizado o procedimento para todas as restantes cargas eléctricas, temos que o trabalho realizado na carga *n* (devido às *n*-1 cargas), virá;

$$W_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{n1}}q_n + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{n-1}}{r_{n,n-1}}q_n \tag{4.6}$$

O trabalho total é a soma de todos estes termos;

$$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_{n-1} + W_n \tag{4.7}$$

Mas podemos chegar à mesma configuração geométrica final, transportando as cargas por ordem inversa, começando pela q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, até q_1.

Ao trazer do infinito a última carga eléctrica, como não está sob influência de qualquer campo eléctrico, o trabalho realizado é nulo (Wn = 0 J).

A carga q_{n-1}, já vai estar sob influência do campo eléctrico criado pela carga q_n - o trabalho realizado será:

$$\mathrm{W}_{n-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_n}{r_{n-1,n}} q_{n-1}$$

A carga q_{n-2}, já vai estar sob influência do campo eléctrico criado pelas duas cargas anteriores – o trabalho realizado será:

$$\mathrm{W}_{n-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_n}{r_{n-2,n}} q_{n-2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_{n-1}}{r_{n-2,n-1}} q_{n-2}$$

Generalizado o procedimento para todas as restantes cargas eléctricas, temos que o trabalho realizado na carga 1 (devido às n-1 cargas anteriores), virá;

$$\mathrm{W}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_n}{r_{1n}} q_1 + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}} q_1$$

No final o trabalho total (que tem de totalizar o mesmo valor) é a soma de todos estes termos;

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}_n + \mathrm{W}_{n-1} + .. + \mathrm{W}_2 + \mathrm{W}_1$$

Adicionando estes dois distintos "processos" e analisando os termos, vemos que pondo em evidência a carga e somando então os potenciais que a afectam, obtemos a seguinte expressão:

$$2\mathrm{W} = \sum_{i=1}^{n} V_i q_i$$

A **Energia Potencial** (trabalho realizado pela força exterior) de um sistema discreto de cargas pontuais, é então dado por:

$$\boxed{\mathrm{E}_{\mathrm{PE}} = \mathrm{W} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i q_i} \qquad (4.8)$$

Basta saber o produto do valor da carga eléctrica pelo valor do potencial eléctrico no ponto de espaço por ela ocupado, para cada carga, e adicionar metade desse valor, de todas as cargas, para termos a Energia Potencial e um sistema de cargas.

Exercício 4.2

Determine a Energia Potencial Eléctrica do sistema de três cargas eléctricas expresso no problema 4.1.

4.1.5 Diferença de Potencial Eléctrico

Na prática o que nos interessa saber (medir) é a **diferença de potencial** (**d.d.p.**). Na maior parte das situações, medimos essas d.d.p. em relação a um ponto de referência ao qual arbitrado um valor de potencial, por exemplo 0 V (que pode ser a própria "Terra"). Este procedimento decorre da função potencial ser definida a menos de uma constante, como vamos verificar mais à frente (em 4.2.1).

$$\Delta V_{ba} = V_a - V_b = \int_b^a -\vec{E}\cdot\vec{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b} = k_0\frac{q}{a} - k_0\frac{q}{b} \tag{4.9}$$

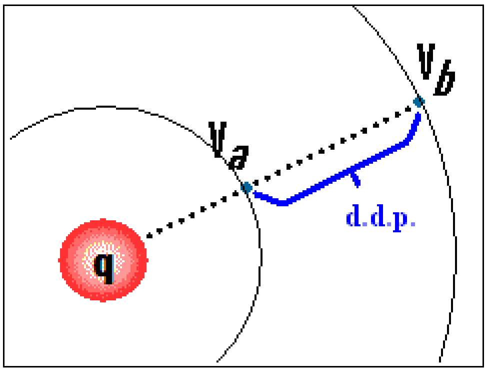


Figura 4.6 – d.d.p. entre dois pontos a e b, originada por uma carga pontual q.

Definição:
O **trabalho realizado** na deslocação de uma carga unitária (q = 1 C) entre quaisquer dois pontos de um campo eléctrico - é a **diferença de potencial eléctrico (d.d.p.)**.

Como a função potencial é uma função contínua, os pontos com igual valor de potencial, formam linhas (ou superfícies) no espaço. A essas linhas chamamos de **isolinhas de potencial eléctrico**, **linhas equipotenciais** ou simplesmente **equipotenciais** (ou superfícies equipotenciais), figura 4.7.

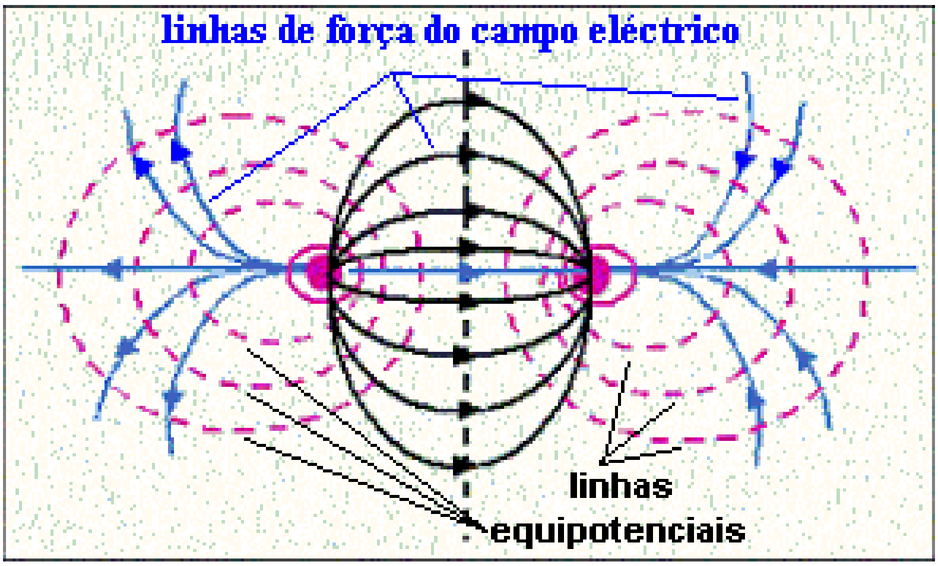


Figura 4.7 – Representação (no plano) de linhas equipotenciais
e do campo eléctrico, originadas por um dipolo de carga eléctrica.

4.2 Potencial Eléctrico e Campo Eléctrico

Já sabemos dois importantes efeitos das cargas eléctricas; a criação no espaço do Campo Eléctrico e também do Potencial Eléctrico. Mas qual a relação entre ambos?

4.2.1 Circulação do Campo Eléctrico

Em matemática chamamos circulação de um campo vectorial, ao integral ao longo da linha Γ, do produto interno entre o campo e o elemento de linha orientado:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{4.9}$$

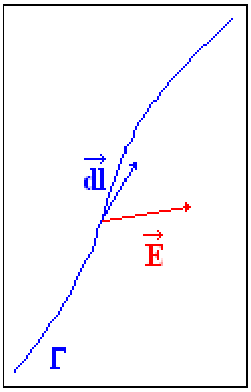


Figura 4.8 – Circulação ao longo de uma linha Γ .

Vamos começar por considerar um campo eléctrico que existe unicamente ao longo de X. O potencial no ponto x é dado por:

$$\mathrm{V}(x) = -\int_{x_0}^{x} \vec{E}_x \cdot \overrightarrow{dx} \tag{4.10}$$

sendo x_0 o nosso ponto de referência do potencial, $\mathrm{V}(x_0) = 0$ V.

Mas isto significa que:

$$\vec{E}_x = -\frac{d\mathrm{V}(x)}{dx}\vec{u}_X \tag{4.11}$$

No caso mais geral, em que o campo eléctrico existe no espaço a 3 dimensões, teremos que as respectivas três componentes, em X, Y e Z;

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial \mathrm{V}(x,y,z)}{\partial x}\vec{u}_x \qquad \vec{E}_y = -\frac{\partial \mathrm{V}(x,y,z)}{\partial y}\vec{u}_y \qquad \vec{E}_z = -\frac{\partial \mathrm{V}(x,y,z)}{\partial z}\vec{u}_z$$

Como o campo eléctrico é a soma dessas três componentes, vem:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\vec{u}_z = -\vec{\nabla}\mathrm{V} \tag{4.12a}$$

A soma destas 3 componentes do campo eléctrico e as suas relações com a função potencial, podem ser sintetizadas recorrendo ao operador gradiente ($\vec{\nabla}$ ou *grad*).

4.2.2 Relação entre o Campo Eléctrico e o Potencial Eléctrico

O gradiente mede a taxa máxima de variação de uma grandeza no espaço, indicando também a direcção e sentido dessa variação.

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\mathrm{V} = -grad\ \mathrm{V}} \qquad (4.12b)$$

Da análise da expressão 4.12, entre a função potencial e o campo eléctrico, obtemos as seguintes propriedades:

1º - as linhas (de força) do campo eléctrico são sempre normais às linhas (ou superfícies) equipotenciais (e vice-versa),
2º - o sentido do campo eléctrico é sempre dos potenciais mais elevados para os potenciais mais baixos.

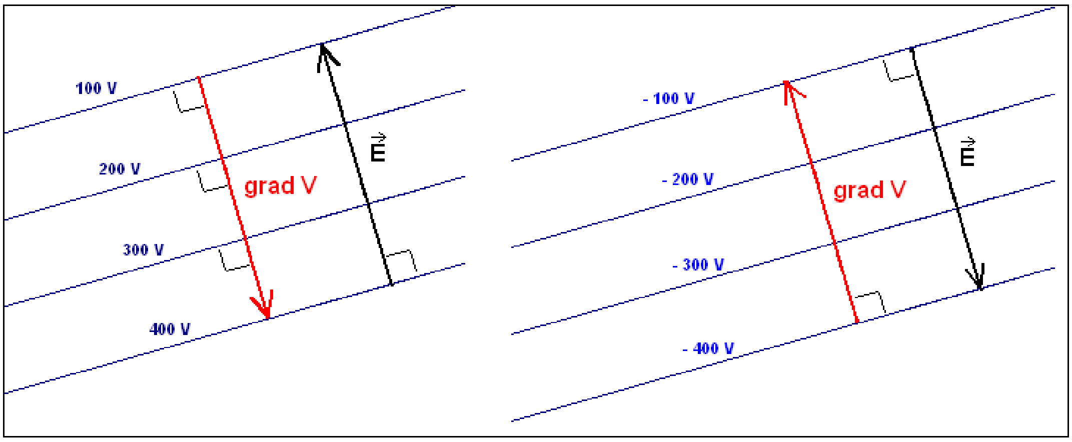


Figura 4.9 – Relação entre as linhas equipotenciais e as linhas de força do campo eléctrico.

Esta é a razão porque podemos na prática usar os valores de diferença de potencial eléctrico (d.d.p.) na quantificação das nossas realizações. Porque existe esta relação entre a função potencial eléctrico e o campo eléctrico. Conhecer uma é equivalente a conhecer a outra.

Desta relação podemos tirar importantes conclusões:

Como já sabemos, do princípio de *Poisson* (3.17), sendo o campo nulo no interior de um condutor em equilíbrio, vem $\vec{\nabla}\mathrm{V} = 0$ o que implica que V é constante em toda a sua região interior, e por continuidade, na superfície do condutor também. Um condutor perfeito em equilíbrio é assim uma região equipotencial e como as linhas do campo eléctrico são normais às equipotenciais, essas mesmas linhas são então perpendiculares à sua superfície (como ilustrado na figura 3.7).

Se aplicarmos a expressão (4.10) a uma linha fechada - circulação fechada do campo eléctrico, temos a seguinte relação;

$$\boxed{-\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = \oint \vec{\nabla}\mathrm{V}.\vec{dl} = 0} \qquad (4.13)$$

Isto demonstra um princípio muito importante – o **Princípio de Conservação da Energia Electrostática** – e que o **Campo Eléctrico é Conservativo**. Encerra igualmente a 2ª equação de *Maxwell* (para a electrostática).

4.2.3 Campo Eléctrico Uniforme

Consideremos agora um campo eléctrico uniforme de intensidade E. Vamos calcular a d.d.p. entre os pontos A e B, ao longo de uma linha do campo;

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = -\int_A^B (E\cos 0^\circ)dr = -\int_A^B Edr \qquad (4.14)$$

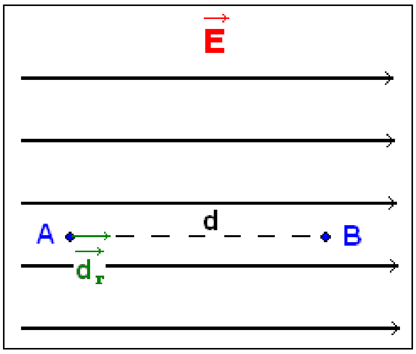


Figura 4.10 – d.d.p. ao longo de uma linha do campo eléctrico.

Como E é constante, temos;

$$\Delta V_{AB} = -E\int_A^B dr = -E\mathrm{d} \qquad (4.15)$$

Se uma carga de prova q_0 se desloca de A para B, teremos a sua variação de energia potencial dada como;

$$\Delta E_{PE} = q_0 \Delta V_{AB} = -q_0 E\mathrm{d} \qquad (4.16)$$

Se $q_0 > 0$ C, então ΔE_{PE} será negativo. Isto significa que a carga positiva perde energia potencial quando se desloca no sentido do campo, em analogia com a perda de energia potencial gravítica, quando a massa (que é sempre positiva) desce no sentido da Terra (no sentido do campo gravítico).

Consideremos agora o caso geral de uma carga que se desloca entre dois quais pontos A e B, não orientados ao longo do campo eléctrico.

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = -\vec{E}\cdot\int_A^B \overrightarrow{dr} = -\vec{E}\cdot\vec{d} \qquad (4.17)$$

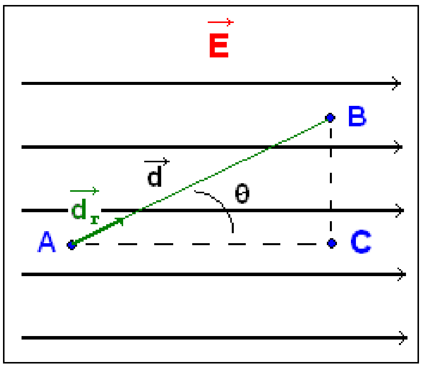


Figura 4.11 – d.d.p. ao longo de uma linha do campo eléctrico.

Ao calcularmos este produto interno, resulta que a projecção de d é o segmento AC, e o valor da d.d.p. e da energia potencial eléctrica é o mesmo do caso anterior.

$$\Delta V_{AB} = -\vec{E}\cdot\vec{d} = -E\mathrm{d}\cos\theta \qquad \text{e} \qquad \Delta E_{PE} = q_0 \Delta V_{AB} = q_0 \Delta V_{AC}$$

Significa que a ΔE_{PE} entre C e B é nula, logo que a ΔV é nula – os pontos C e B têm o mesmo valor de potencial eléctrico. Os pontos C e B estão ao longo de uma linha perpendicular ao campo eléctrico E, isto é, estão situados sobre a mesma equipotencial.

4.2.4 Potencial eléctrico de distribuições contínuas de carga

Quando temos uma distribuição contínua de cargas q, temos de analisar o problema, escolhendo um elemento infinitesimal de carga dq, e determinando-se o potencial dV criado por essa porção de carga num ponto P (pela expressão 4.4). Depois sintetizamos a acção de todos os elementos infinitesimais de carga nesse ponto P, integrando sobre todo o domínio da distribuição de carga.

$$\mathrm{dV(P)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \tag{4.18}$$

$$\mathrm{V(P)} = \int \mathrm{dV(P)} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \tag{4.19}$$

Exercício 4.3

Calcule o potencial no ponto (0,0,5) m, originado por um disco de raio 2 m, centrado na origem e no plano Z = 0 m, com uma carga total de 40/3 nC uniformemente distribuída.