Capítulo III – Lei de Gauss

3.1 Fluxo eléctrico e lei de *Gauss*

A lei de *Gauss* aplicada ao campo eléctrico, permite-nos resolver de uma maneira simples e expedita muitos problemas complicados. Funciona muito bem em problemas com simetria. Na sua essência - faz a "ligação" entre:

causa - a carga eléctrica - e o efeito - o campo eléctrico

3.1.1 Fluxo eléctrico

A noção de fluxo é bastante aplicada no nosso dia a dia. Já todos ouvimos falar de "fluxo sanguíneo", "fluxo de tráfego (fluir do trânsito)", "fluxo luminoso", "fluxo de água no Castelo do Bode", etc, etc. Está relacionado com "qualquer coisa" em movimento através de uma dada região, e muitas vezes está também relacionado com o tempo em que isso decorre. Liga portanto a quantidade de "substância" (sangue, automóveis, fotões, água…), que atravessa determinada área num determinado intervalo de tempo.

Em física, este conceito está bem definido e – o fluxo de uma grandeza física através de uma superfície é usado com dois significados distintos, dependendo do tipo de grandeza física a que nos referimos:

1. **Fluxo de um campo vectorial** através de uma superfície - resultado do integral (soma), em toda a superfície, do produto escalar entre o campo vectorial e o vector normal (perpendicular) a cada elemento infinitesimal dessa superfície.

2. No contexto de **fenómenos de transporte** (como "transferência de calor" e difusão), fluxo de uma dada grandeza através de uma superfície - taxa a que essa superfície é atravessada pela grandeza considerada.

Nesta 2ª definição, o fluxo é simplesmente a quantidade da grandeza física considerada (por exemplo; a energia, o número de fotões, a massa de água, etc…) que atravessa uma superfície por unidade de tempo. Por esta definição, o fluxo resultante é um vector, cujo módulo é igual à taxa a que a superfície é atravessada e cuja orientação é dada pela orientação em que a superfície está a ser atravessada. Alguns exemplos concretos deste tipo de fluxo, são:

- Fluxo luminoso: quantidade fotões (energia), que atravessa uma área unitária, por unidade de tempo. Vem expresso nas unidades: J m^{-2} s^{-1}

- Fluxo de massa: quantidade de massa que atravessa uma área unitária, por unidade de tempo. Vem expresso nas unidades: kg m^{-2} s^{-1}

Mas no nosso caso do Electromagnetismo, o fluxo considerado é-o segundo a 1ª definição. Esta definição diz-nos que o fluxo Φ de um qualquer campo vectorial $\vec{E}$ (função da posição), através de uma superfície *S*, é dado pela seguinte expressão:

$$\Phi = \iint_{\text{sup}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{3.1}$$

em que; $\overrightarrow{dS}$ é o chamado elemento infinitesimal de área orientada. É uma "área vectorial", isto é, tem uma área dS (módulo), mas essa área existe e está orientada no espaço – perpendicularmente ao seu versor (vector unitário) normal $\vec{u}_n$ (figura 3.1).

$$\overrightarrow{dS} = dS\vec{u}_n \tag{3.2}$$

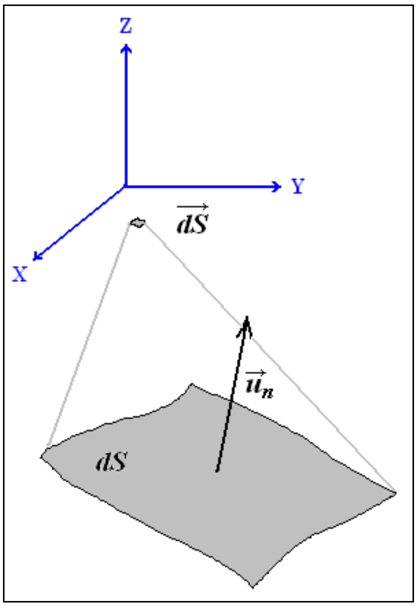


Figura 3.1 – Elemento infinitesimal de área orientada.

Pela definição e pela expressão 3.1, verificamos ser esta noção de fluxo, uma grandeza escalar, um número portanto. No nosso caso, o que significará esse número? Qual a sua grandeza física (e consequente unidade física), quando o campo vectorial não for um campo qualquer, mas for mesmo o campo eléctrico $\vec{E}$? Estaremos então a quantificar o valor do fluxo do campo eléctrico $\vec{E}$ através de uma dada superfície (e que superfície?).

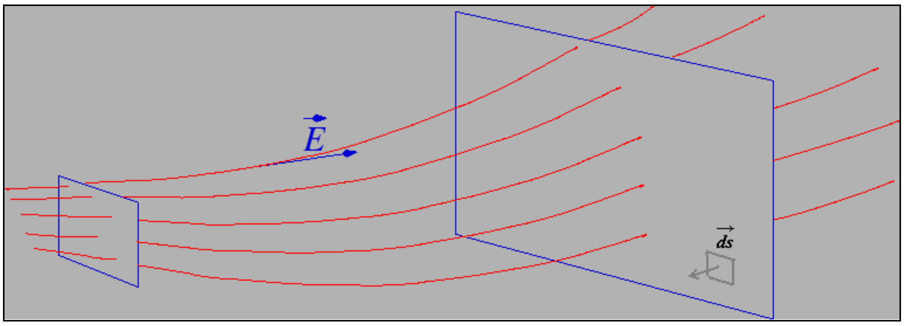


Figura 3.2 – Fluxo eléctrico através de superfícies.

3.1.2 Lei de *Gauss*

A **lei de *Gauss***[1] (ou lei do fluxo do campo eléctrico) é a aplicação da expressão do fluxo (3.1), para o campo eléctrico $\vec{E}$, quando a superfície considerada é fechada e encerra as cargas eléctricas no seu interior. Relaciona o fluxo (quantidade de linhas do campo eléctrico) que atravessam a superfície e a quantidade de carga eléctrica que origina esse mesmo fluxo. A relação entre o fluxo e a superfície dá-nos também a noção de **densidade de fluxo eléctrico** (quão próximas estão as linhas do campo eléctrico, entre si).

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (3.3)$$

À superfície fechada por onde vamos calcular o fluxo – chamamos apropriadamente – **superfície gaussiana** (*SG* na expressão 3.3). É uma superfície imaginária (matemática) que concebemos em torno das cargas eléctricas. Na prática equivalerá a um sensor que exista totalmente em torno do fenómeno que queiramos estudar.

Mas vamos primeiro determinar quanto vale o produto escalar de uma fracção infinitesimal do campo eléctrico que atravessa a correspondente área infinitesimal – o fluxo infinitesimal.

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \vec{E} \cdot (dS\, \vec{u}_n) = dS\, (\vec{E} \cdot \vec{u}_n) = dS \left|\vec{E}\right| \left|\vec{u}_n\right| \cos\theta = dS\, E \cos\theta \qquad (3.4)$$

em que θ é o ângulo existente entre o vector campo eléctrico $\vec{E}$ e o versor da área infinitesimal orientada $\vec{u}_n$.

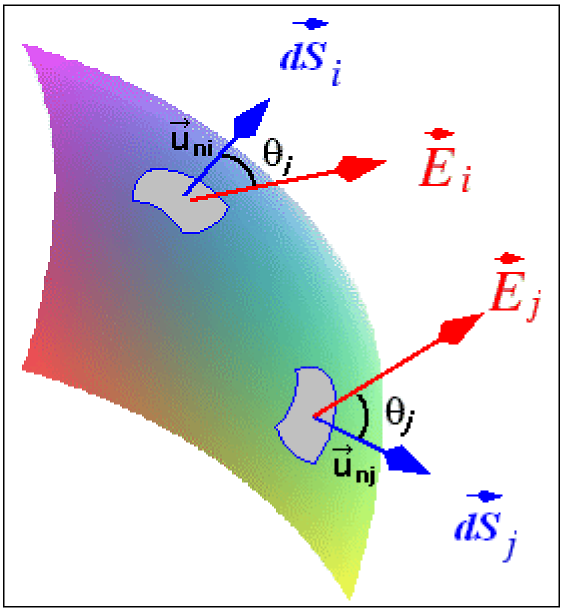


Figura 3.3 – Fluxo eléctrico através de superfícies infinitesimal.

Significa isto que a direcção e orientação com que o campo atravessa a superfície é preponderante para o valor do fluxo, variando entre um valor máximo (mínimo), quando o $\cos\theta = 1$ e $\theta = 0º$ ($\cos\theta = -1$ e $\theta = 180º$) e $\cos\theta = 0$ e $\theta = 90º$ (ou 270º).

[1] *Johann Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) matemático, astrónomo e físico alemão. Considerado o maior matemático de todos os tempos.

Mas como resolvemos o problema de saber qual a orientação do versor normal à superfície infinitesimal. A direcção normal à superfície tem sempre dois sentidos. Qual devemos escolher? No nosso caso particular da aplicação da lei de *Gauss* isso é fácil de definir. Como usamos superfícies gaussianas fechadas, consideramos sempre a normal que aponta de dentro para fora da superfície, portanto o nosso versor é positivo nessa condição.

Vamos agora determinar todo o fluxo eléctrico (total) que atravessa a superfície gaussiana. Para isso temos de somar todos os infinitésimos fluxos (dados pela expressão 3.4) nessa superfície gaussiana. Significa isso que temos de dividir essa superfície num número imenso de pequenos domínios infinitesimais, para garantir que na pequena área infinitesimal o vector campo eléctrico é constante.

$$\Phi = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{SG} d\Phi \qquad (3.5)$$

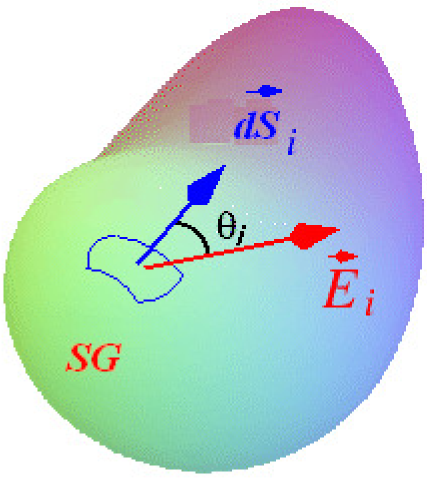


Figura 3.4 – Fluxo eléctrico através de superfícies de toda a superfície gaussiana (*SG*).

Mas afinal quanto é que vale o fluxo eléctrico?

Vamos concretizar para o caso do fluxo de uma carga eléctrica pontual (q), situado no vazio. Consideremo-la como positiva. Sabemos então que as linhas de forças do campo eléctrico são divergentes e radiais. O campo eléctrico é dado pela expressão 2.9.

Temos agora que escolher uma *SG* que envolva completamente esta carga pontual. Para simplificar, vamos escolher uma superfície esférica de raio r, centrada no ponto onde está a carga eléctrica. Isto vai fazer com que o campo eléctrico na *SG* tenha sempre a mesma intensidade, uma vez que todos os pontos da *SG* estão à mesma distância (r) da carga eléctrica (no centro). E o tamanho dessa esfera? Isto é, qual deve ser o valor de r? Vamos ver que o resultado é independente do tamanho da esfera (e por conseguinte da distância à carga) e da forma da *SG*. Do ponto de visto prático de aplicação da lei de *Gauss*, a escolha da forma e posição da *SG* , explorando a simetria do problema, permite uma resolução muito mais célere dos problemas.

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{SG} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{SG} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dS\, \vec{u}_r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_{SG} dS \qquad (3.6)$$

Como o campo eléctrico é radial, o seu sentido coincide exactamente com o versor normal à *SG* (dai a importância para o cálculo, da escolha da *SG* e da sua posição).

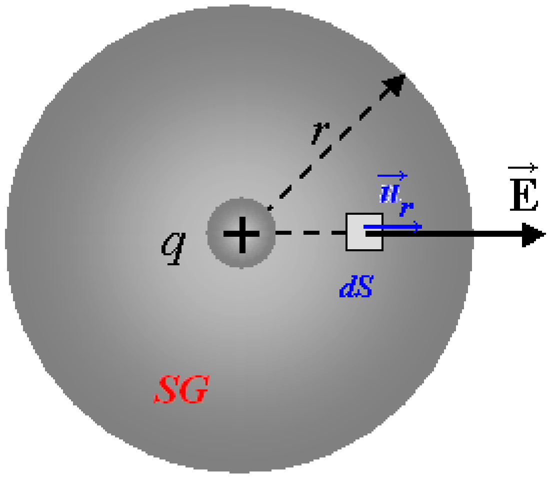


Figura 3.5 – Fluxo eléctrico de uma carga eléctrica pontual.

Mas, $\oint_{SG} dS$ não é mais do que a contabilização da área da *SG* escolhida, neste caso uma esfera de raio *r*. A área desta *SG* é: $4\pi\, r^2$, vindo então:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi\, r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (\mathrm{NC^{-1}m^2}) \tag{3.7}$$

Constatamos assim que o fluxo eléctrico Φ é directamente proporcional à carga *q* (total) existente no interior da *SG*. Quanto maior for a carga – maior é o fluxo do campo eléctrico. O fluxo é uma medida da quantidade de carga. O fluxo é originado pela carga e quanto maior esta for, maior o fluxo. Se a carga for positiva, temos um fluxo positivo. Se carga for negativa, temos um fluxo negativo.

E se a *SG* fosse maior, por exemplo com o dobro do raio (2*r*)? É fácil constatar que sendo as linhas do campo radiais, todas elas iriam interceptar a nova *SG* ao dobro da distância. Significa que a intensidade do campo eléctrico nessa superfície tem agora apenas 1/4 do valor inicial. Mas a nova *SG* terá também 4 vezes mais área que a inicial, obtendo-se o mesmo resultado. Logo a aplicação da lei de *Gauss* é independente do tamanho da *SG* (deste que contenha toda a carga no seu interior).

E a forma? Bem, se o fluxo total é exactamente o mesmo nas duas superfícies esféricas de raios diferentes, significa que linhas do campo eléctrico que atravessam a primeira esfera – são exactamente as mesmas que atravessam a segunda esfera. Qualquer *SG* com qualquer forma, por mais irregular que possa ser, situada entre estas duas esferas – é atravessada pelo mesmo fluxo, inclusive não tem de estar centrada na carga, e pode estar para além da segunda esfera ou entre a primeira esfera e a carga. É indiferente (desde que contenha a carga no seu interior).

$$\boxed{\Phi = \oint_{SG} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}} \tag{3.8}$$

em que a carga *q* simboliza toda a carga existente no interior da *SG*. Esta carga pode ser uma distribuição de carga pontuais, existir sobre uma área ou num volume. È simplesmente a soma algébrica da carga existente no interior da *SG*.

Vejamos os três casos particulares da posição da carga eléctrica na aplicação da lei de *Gauss*, que são:

– 1º - a carga está no interior da *SG* (o que acabamos de fazer),
– 2º - a carga está na *SG*,
– 3º - a carga está no exterior da *SG*.

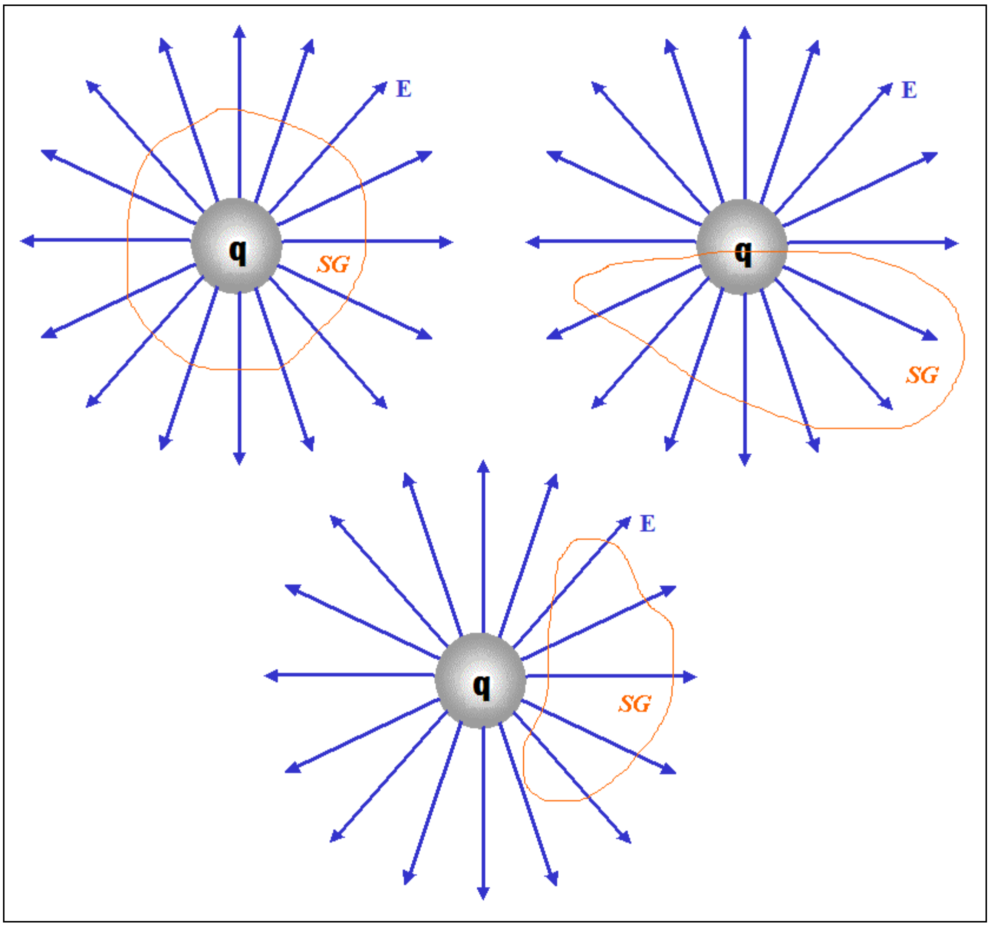


Figura 3.6 – Os três casos particulares do fluxo e lei de *Gauss*.

A aplicação da lei de *Gauss* (3.8), indica-nos, como já vimos, que:

1º caso $$\Phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2º caso $$\Phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q}{2\varepsilon_0}$$

(só metade do fluxo atravessa a nossa *SG*)

3º caso $$\Phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

(o fluxo total é nulo, pois o fluxo que entra na *SG* é exactamente igual ao que desta sai)

Exercício 3.1

Usando a lei de *Gauss*, determine o campo eléctrico de uma distribuição plana infinita de carga eléctrica.

Um dos mais importantes resultados da aplicação da lei de *Gauss*, decorre da sua aplicação a um dipolo eléctrico. Ao faze-lo, verificamos que **todas as linhas** do campo eléctrico "nascem" (tem origem) nas cargas positivas e "desaparecem" (terminam) nas cargas negativas.

3.1.2.1 Densidade de fluxo eléctrico

A distribuição de carga que existe no interior da *SG*, pode ser expressa através da densidade de carga eléctrica, (expressões 2.7). Consideremos a densidade volúmica de carga ρ_v. Então a carga no interior q, posse ser escrita como;

$$q = \iiint_{vol} dq = \iiint_{vol} \rho_v dv \tag{3.9}$$

Em que o *vol* é o volume ocupado pela distribuição de carga eléctricas.

O que dá para a lei de *Gauss*;

$$\Phi\varepsilon_0 = q = \iiint_{vol} \rho_v dv = \oint_{SG} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{3.10}$$

Para solucionar a questão, temos de aplicar o **teorema do fluxo-divergência**, que diz o seguinte:

$$\iiint_{vol} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dv = \oint_{\sup} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{3.11}$$

Onde *sup* é a superfície que encerra o volume *vol* e onde $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ é o operador matemático **divergência**, definido da seguinte maneira:

$$\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{3.12}$$

O operador divergência mede a magnitude da "fonte" (ou "sumidouro") de um campo vectorial num dado ponto. É um escalar que mede a dispersão (divergência) dos vectores do campo num determinado ponto.

A expressão 3.11 significa que o fluxo que têm origem num dado volume é igual ao fluxo que atravessa a superfície limítrofe desse mesmo volume.

Aplicando o teorema do fluxo-divergência à lei de *Gauss*, temos;

$$\oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{vol} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) dv = \iiint_{vol} \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} dv \tag{3.13}$$

No limite, o volume dos integrais é igual, o que resulta na igualdade dos integrandos.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{ou} \qquad \vec{\nabla} \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho \tag{3.14}$$

Esta expressão é a **Equação de *Poisson*** ou **1ª Equação de *Maxwell***

A densidade de carga pode ser de qualquer natureza (volúmica, superficial, linear).

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \tag{3.15}$$

Ao vector $\vec{D}$ chamamos de **vector densidade de fluxo eléctrico**.

Assim sendo, a nossa **1ª Equação de *Maxwell*** pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho} \tag{3.16}$$

3.2 Condutor ideal e princípio de *Poisson*

3.2.1 Condutor ideal

Um **condutor perfeito** é um **corpo ideal**, **homogéneo**, no interior do qual as cargas eléctricas têm a **mais completa mobilidade** (apenas limitada aos movimentos normais à sua superfície limítrofe, os quais levariam as cargas a abandonar o condutor), quando sujeitas à acção de um campo eléctrico. **Tem resistência eléctrica nula**.

A partir do conceito de condutor perfeito – decorre uma propriedade fundamental designada por - **Princípio de *Poisson***:

3.2.2 Princípio de *Poisson*

"Em todo o ponto interior de um condutor perfeito em equilíbrio electrostático o campo eléctrico é nulo"

$$\boxed{\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}} \tag{3.17}$$

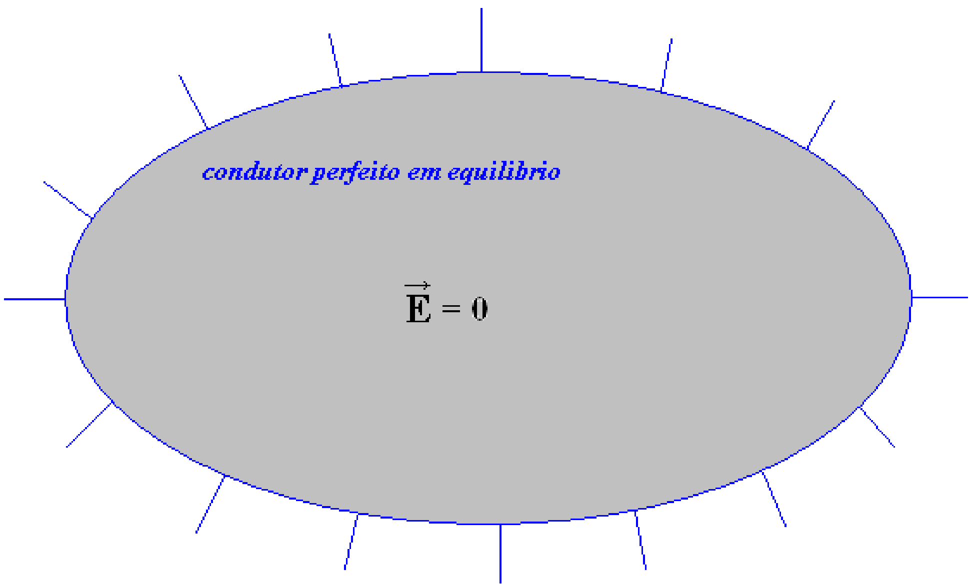


Figura 3.7 – Condutor perfeito em equilíbrio electrostático. Campo eléctrico é normal à superfície.

Estamos perante um condutor (ideal ou não) em equilíbrio electrostático: quando não há um movimento líquido de cargas no seu interior e na sua superfície.

Exercício 3.2

Demonstração do Princípio de *Poisson*.

3.2.2.1 Propriedades e distribuição de carga num condutor em equilíbrio electrostático

Que tipo e qual deverá ser a distribuição de carga eléctrica, característica de um condutor em equilíbrio electrostático?

Se atendermos ao **princípio de *Poisson***, concluímos que a sua carga total encontra-se inteiramente distribuída e repartida pela sua superfície limítrofe. Quando um condutor neutro é colocado num campo eléctrico (que pode ser uniforme), haverá necessariamente um movimento efectivo dos seus electrões livres. Este movimento é muito breve ($\approx 10^{-16}$ s, num bom condutor), e cessa assim que em cada ponto interior do condutor, o campo eléctrico total seja nulo.

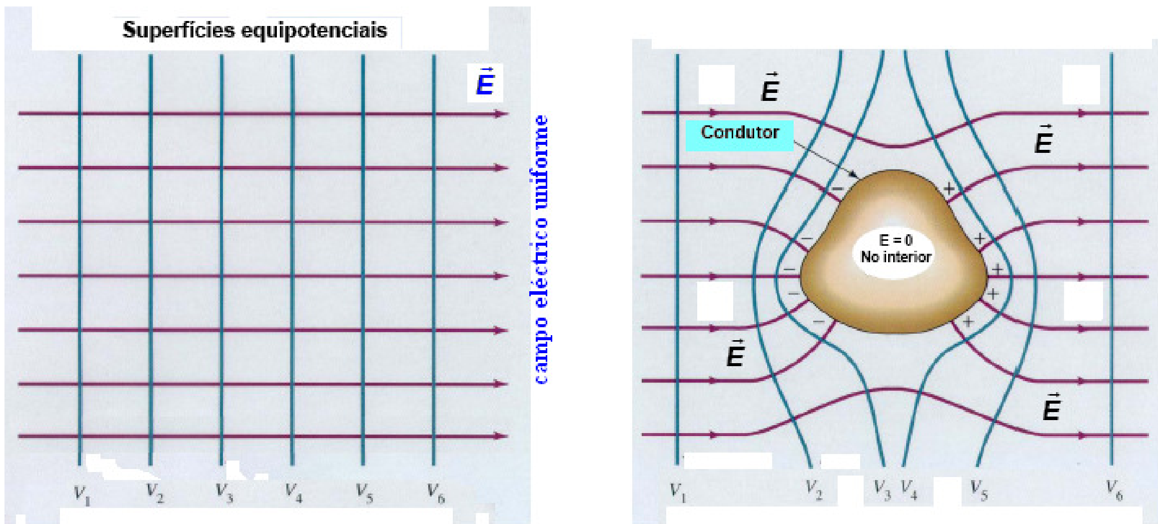
Vamos enumerar as várias propriedades nos condutores (ideal ou real);

1 - O campo eléctrico é nulo em qualquer ponto no interior do condutor (3.17),

2 - Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor (3.8),

3 - O campo eléctrico na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do condutor e tem o módulo igual a $E = \dfrac{\rho_S}{\varepsilon_0}$, onde ρ_S é a densidade de carga por unidade de área, no ponto da superfície (3.8),

4 - Num condutor com forma irregular, a carga tende a acumular-se nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontiaguda (efeito pára-raios) (3.8).



a) b)

Figura 3.8 – a) Campo eléctrico uniforme. b) Efeito de condutor no campo eléctrico.

Vamos agora analisar a distribuição de cargas eléctricas num condutor que contem uma cavidade no seu interior.

Blindagem Eléctrica

Consideremos a figura 3.9, em que um condutor em equilíbrio, carregado com carga Q e superfície externa (S_{ext}), exibe uma cavidade no seu seio, com uma superfície interna (S_{int}). A carga eléctrica no seu interior tem de ser nula, como acabamos de saber. Mas existem duas hipotéticas situações de distribuição de carga na cavidade interior. Na primeira situação, expressa na figura 3.9a), exibe carga separada e distribuída pela superfície interior (mas de valor total nulo) e a carga total Q só existe na superfície exterior. Na segunda situação, expressa na figura 3.9b), não existe de todo qualquer carga distribuída pela superfície interior. Qual das situações se verifica na natureza?

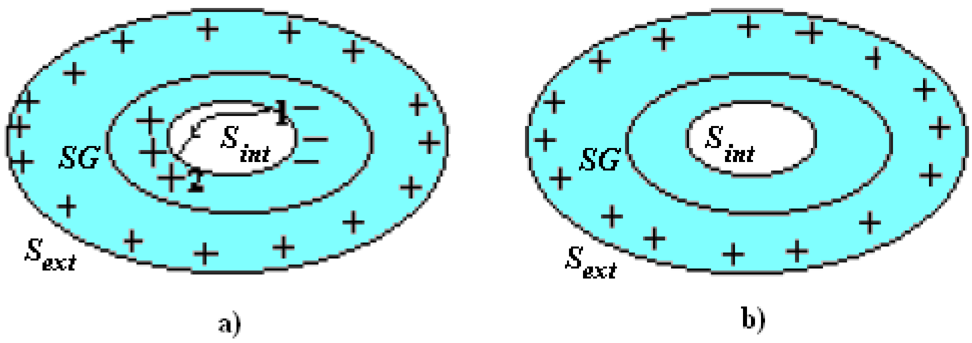


Figura 3.9 – Condutor com cavidade. Hipóteses: a) densidade não nula de carga superficial na cavidade, b) densidade nula de carga na cavidade (situação real).

Se a primeira situação fosse válida, as linhas de campo eléctrico não atravessam o condutor e têm que ficar confinadas na sua cavidade. A linha de força do campo eléctrico que liga os pontos 1 e 2 (fig. 3.9a) tem que estar totalmente contida na cavidade. Existiria portanto, uma diferença de potencial entre os pontos 1 e 2 da superfície interna (veremos a definição de potencial e diferença de potencial, tal como a sua relação com o campo eléctrico, no capítulo seguinte). Teríamos assim movimentação de cargas na superfície interna, contrariando o estado de equilibrio. Consequentemente esta situação é proibida e não se verifica. É efectivamente a segunda situação, **ausência total de carga na superfície interior,** a situação que se verifica na natureza. Este efeito é conhecido como **Blindagem Eléctrica**.

Exemplos práticos e muito úteis desta constatação, são por exemplo o balde de *Faraday* e a Gaiola de *Faraday*.

Balde de *Faraday*

A figura 3.10 elucida experiência do balde de *Faraday*, relacionada com o equilíbrio electrostático de um condutor. Ao inserirmos uma esfera carregada positivamente num balde de forma circular, que se encontra electricamente isolado (3.10a), verificamos que ocorre um desvio no ponteiro do electrómetro[2] ligado ao balde, quando a esfera se encontra no seu interior (3.10b). A deflexão no ponteiro é devida ao facto da carga positiva da esfera induzir uma carga negativa (atracção) na superfície interna do balde e uma distribuição de carga positiva (repulsão) na superfície externa do balde. *Faraday* constatou que o ponteiro não se desviou mais dessa indicação, mesmo quando a esfera tocou no fundo do balde (3.10c) e

[2] Aparelho para detectar e medir cargas eléctricas.

mesmo após ter sido retirada do balde (3.10d). Constatou contudo que após retirar a esfera do balde, esta se encontrava agora descarregada. Aparentemente, quando a esfera tocou no fundo do balde houve uma passagem de uma quantidade de carga negativa, do balde para a esfera, exactamente igual à quantidade de carga positiva que se encontrava na esfera, logo ficando a esfera electricamente neutra (equilíbrio electrostático). O balde ao perder essa carga negativa ficou só com uma quantidade de carga positiva exactamente igual à que a esfera possuía inicialmente.

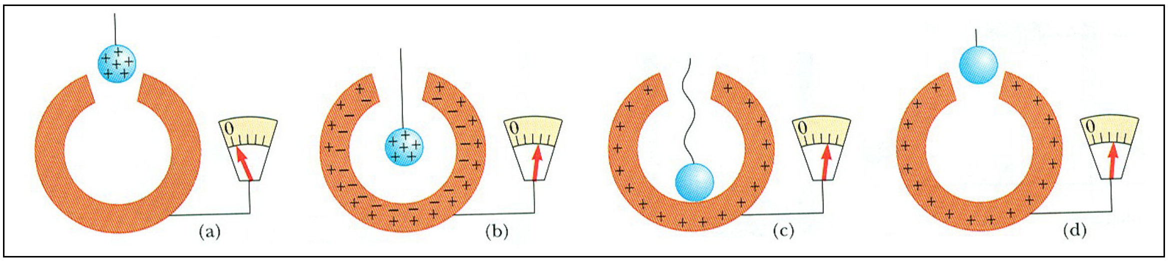


Figura 3.10 – Experiência do balde de *Faraday*.

3.2.2.2 Distribuição de carga num corpo isolante

Vejamos o campo existente quando um corpo isolante é electrizado. Por exemplo uma esfera isolante de raio a; densidade volúmica de carga uniforme ρ_v e carga total Q, figuras 3.11 e 3.12.

Campo eléctrico no exterior da esfera.
Campo exterior: façamos uma *SG* de raio r, concêntrica com a esfera isolante.

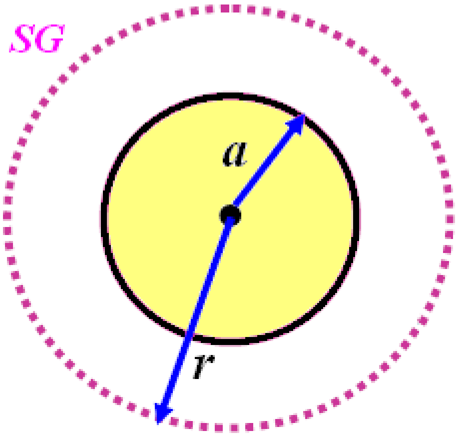


Figura 3.11 – Esfera isolante, caso $r > \boldsymbol{a}$.

Pela lei de *Gauss*, o fluxo é $\Phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{SG} EdS = E\oint_{SG} dS = E4\pi\, r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Implicando que o módulo do campo eléctrico seja dado por

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{(para } r > a\text{)} \qquad (3.18)$$

Sabendo que o campo é radial (por razões de simetria), temos então que $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, resultado equivalente ao efeito de uma carga pontual.

<u>Campo interior</u>: apliquemos agora uma nova *SG* de raio *r*, concêntrica com a esfera isolante, mas interior a esta.

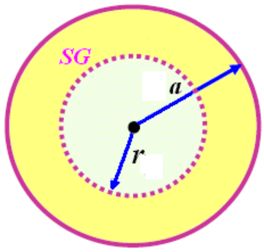


Figura 3.12 – Esfera isolante, caso $r < \boldsymbol{a}$.

Pela lei de *Gauss*, a carga no interior (q_{int}) da *SG* de volume *V* é menor que *Q* ($q_{int} < Q$);

$$q_{\text{int}} = \rho_v \iiint_V dV = \rho_v \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

e devido às questões de simetria, o campo é radial e perpendicular à *SG*. Da mesma forma;

$E = \dfrac{q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho_v \frac{4}{3}\pi\, r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho_v}{3\varepsilon_0} r$ e pela definição (2.7c), $\rho_v = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi\, a^3}$, vem que:

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = k_0 \frac{Q}{a^3} r \qquad (\text{para } r < a) \tag{3.19}$$

A continuidade entre as duas expressões (3.18 e 3.19), isto é entre os dois domínios, interior e exterior, comprova-se tomando $r = a$. A figura 3.13 ilustra a intensidade do campo eléctrico.

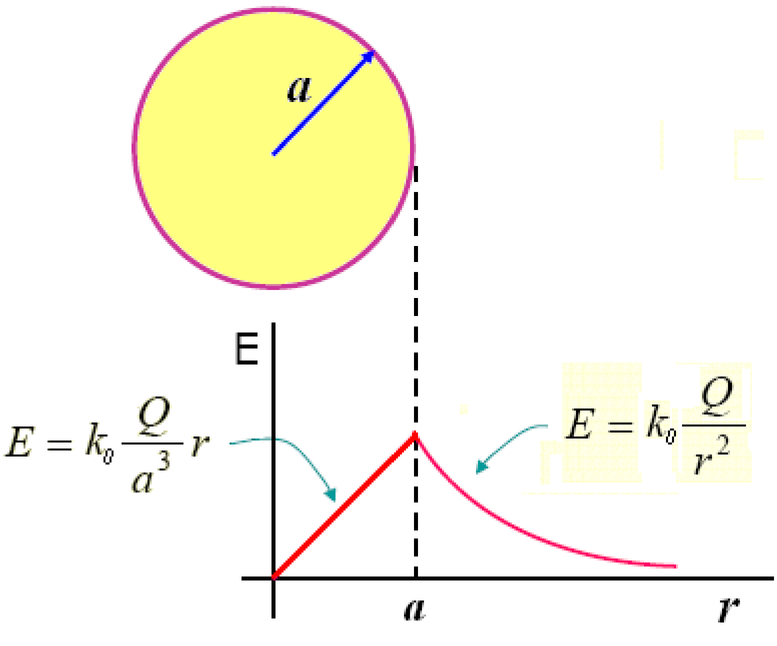


Figura 3.13 – Campo eléctrico de uma esfera isolante..