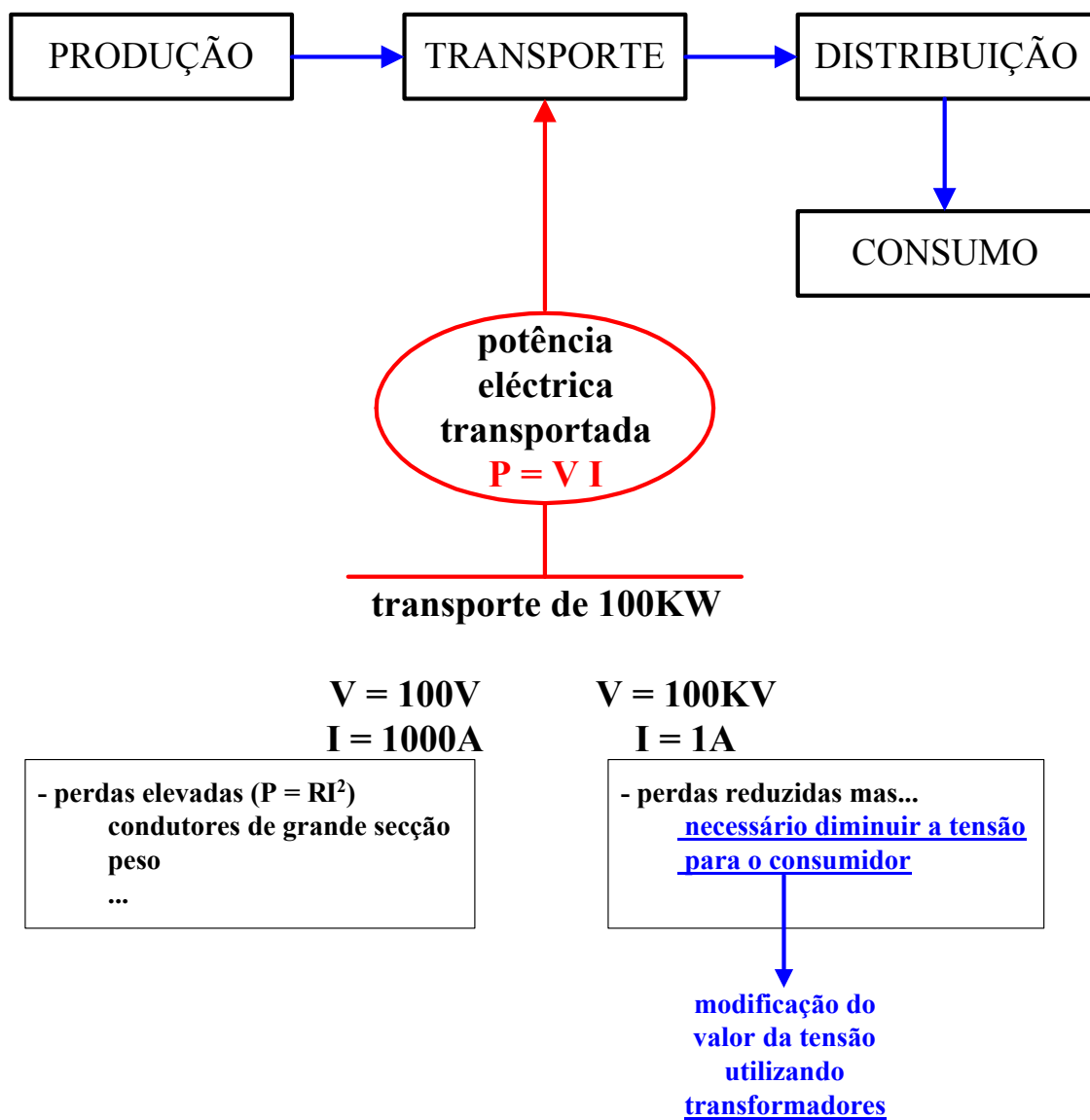


CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA
ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

CORRENTE ALTERNADA SINUSOIDAL

CORRENTE ALTERNADA SINUSOIDAL MONOFÁSICA (CA)

NECESSIDADE DA CA



Outras razões...

REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DA CA (sinusoidal)

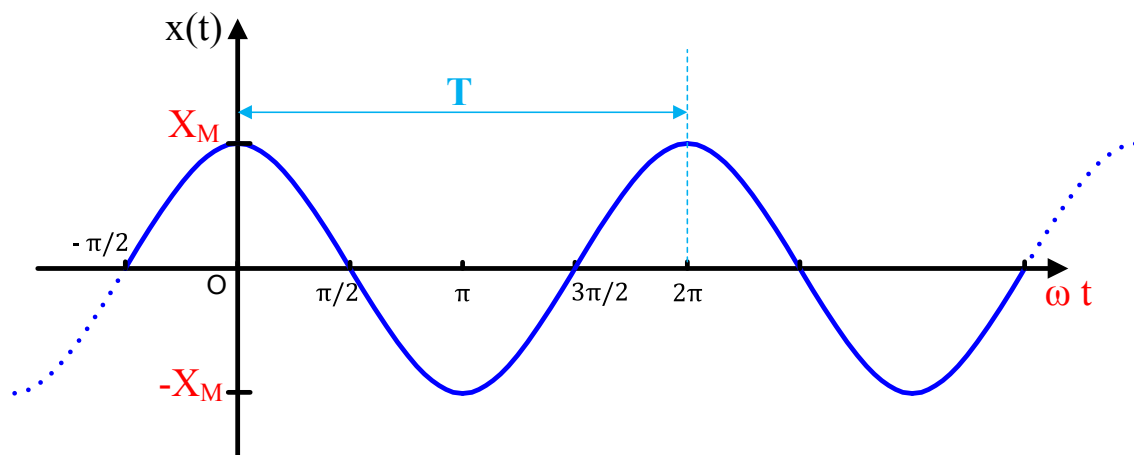
Uma corrente (ou tensão) alternada sinusoidal pode ser representada por uma função seno ou por uma função cosseno:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi) \text{ ou } x(t) = X_M \sin(\omega t + \theta)$$

Função Co-seno

1) caso particular, $\varphi=0$

$$x(t) = X_M \cos(\omega t)$$



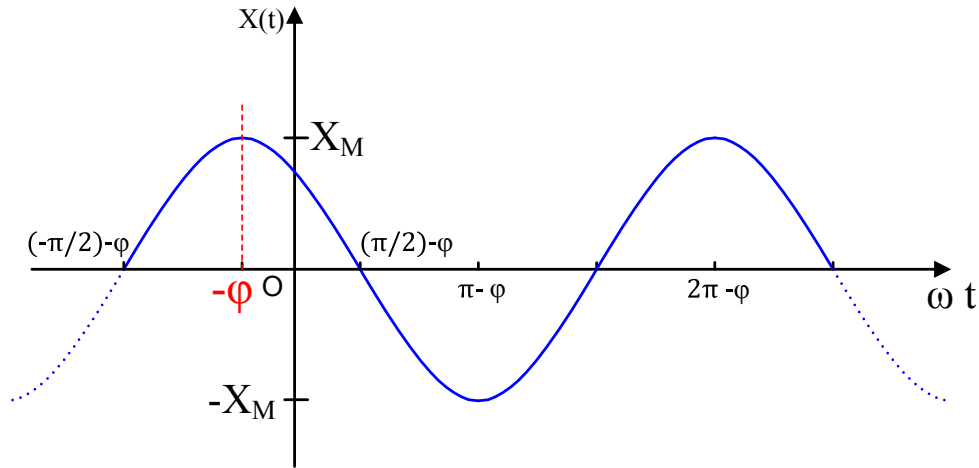
- $x(t)$: valor instantâneo
- X_M : amplitude (é sempre um valor positivo)
- ω : frequência angular [rad/s]
 - $\omega = 2\pi f$
 - $f = \frac{1}{T}$

T : período (no tempo): é o tempo ao fim do qual a função se repete [s]

f : frequência (*linear*): é o nº de períodos por segundo [Hz, s^{-1} , c/s]

2) caso geral, $\varphi \neq 0$

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi)$$



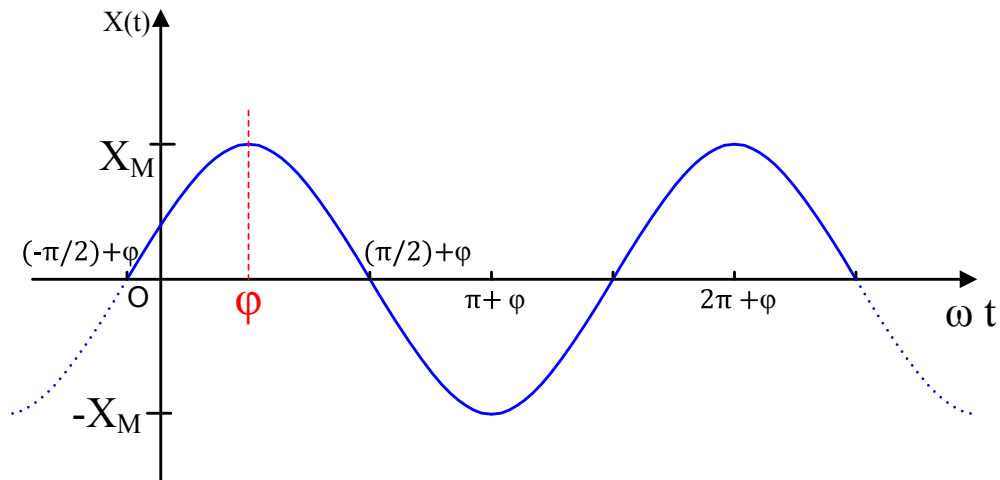
- φ : fase (na origem dos tempos) [rad, grau]

Notar que:

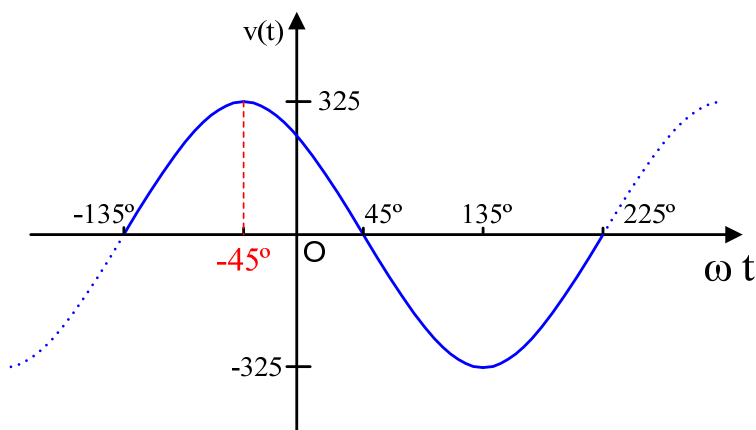
- φ positivo: translação da função co-seno para a esquerda
(é o caso representado na figura anterior)
- φ negativo: translação da função co-seno para a direita
- Importante: na função co-seno mede-se a fase φ quando a função atinge o seu primeiro **máximo** (antes ou depois da origem).

Exemplos:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t - \varphi)$$

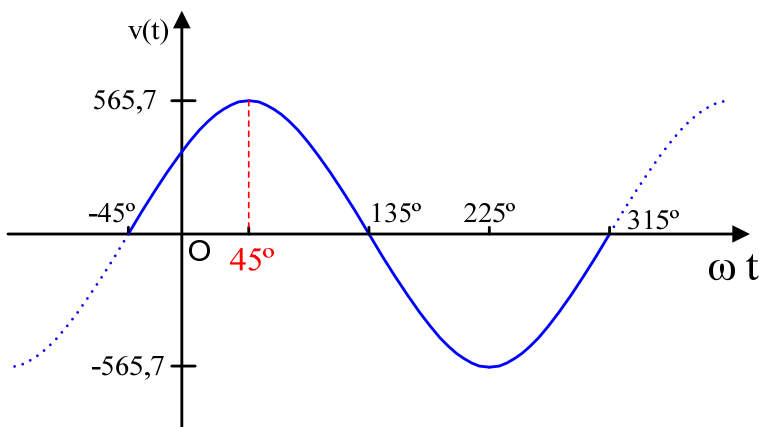


$$v(t) = 325 \cos(100\pi t + 45^\circ) \text{ [V]}$$



Amplitude: $V_M = 325\text{V}$
Frequência angular: $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$
Frequência: $f = 50\text{Hz}$
Período: $T = 20\text{ms}$
Fase: $\varphi = 45^\circ$

$$v(t) = 400\sqrt{2} \cos(380t - 45^\circ) \text{ [V]}$$



Amplitude: $V_M = 565,7\text{V}$
Frequência angular: $\omega = 380 \text{ rad/s}$
Frequência: $f = 60,5\text{Hz}$
Período: $T = 16,5\text{ms}$
Fase: $\varphi = 45^\circ$

Exercício A48

1. Represente graficamente as seguintes funções e diga as unidades de cada parâmetro.

a) $i(t) = 4 \sin(\omega t + \pi/2)$ [A]

b) $i(t) = 4 \sin(\omega t - \pi/2)$ [A]

c) $v(t) = 100 \cos(100\pi t + \pi/4)$ [V]

2. Determine a amplitude, fase, período e frequência das tensões seguintes, e represente-as graficamente como função do tempo.

a) $v(t) = 12 \cos(50t + 10^\circ)$ [V]

b) $v(t) = 5 \sin(4\pi t - 60^\circ)$ [V]

Notar que:

→ para se poder comparar duas funções, ambas têm de estar escritas como senos ou como co-senos

→ qualquer função escrita como seno pode ser transformada em co-seno e vice-versa:

$$\sin \alpha = \cos(\alpha - 90^\circ)$$

$$-\sin \alpha = \cos(\alpha + 90^\circ)$$

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$$

$$-\cos \alpha = \sin(\alpha - 90^\circ)$$

→ também podem ser úteis as seguintes expressões:

$$\sin(\alpha \pm 180^\circ) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm 180^\circ) = -\cos \alpha$$

GRANDEZAS CARACTERÍSTICAS

Valor médio (num período) [*time average value*]

$$X_{\text{médio}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$X_{\text{médio}} = 0$$

(válido apenas para funções alternadas sinusoidais)

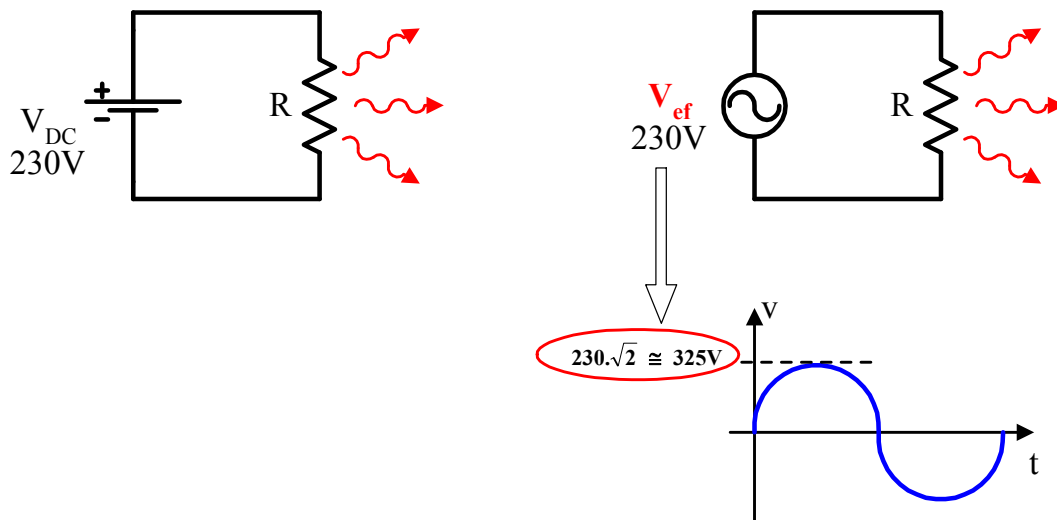
Valor eficaz [*root-mean-square value (rms)*]

$$X_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt}$$

$$X_{\text{ef}} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}$$

(válido apenas para funções alternadas sinusoidais)

eficaz, porquê? Significado:



Valor aritmético médio (valor médio em meio período)

$$X_{\text{médioT/2}} = \frac{2}{\pi} V_M$$

Factor de forma

$$\beta = \frac{X_{ef}}{X_{\text{médioT/2}}} \cong 1,11$$

Notar que:

- para caracterizar as grandezas alternadas sinusoidais indica-se normalmente o valor eficaz e não a amplitude
- quando nada se diz sobre o valor associado a uma grandeza alternada sinusoidal, subentende-se que se trata do valor eficaz
- os instrumentos de medida para corrente alternada (voltímetros, amperímetros...) vêm graduados em valor eficaz

→ nas expressões matemáticas, para colocar em evidência o valor eficaz, frequentemente escreve-se a raiz quadrada explicitamente:

$$i(t) = I_{\text{ef}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta) = 10\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{A}]$$

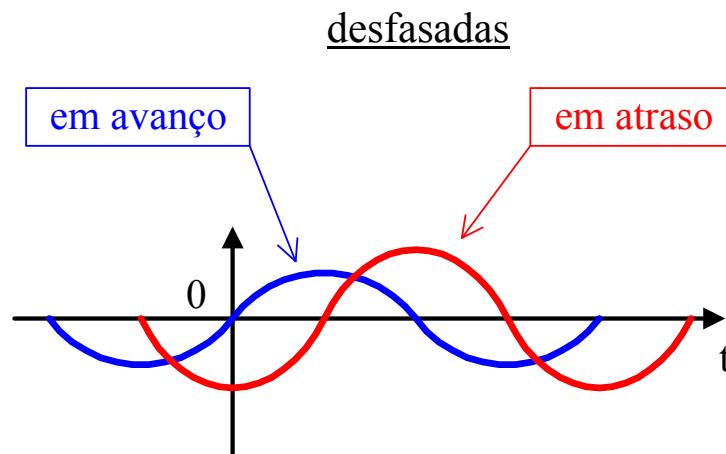
Exercício A49

Considere a tensão $v(t) = 150 \sin(500t - 30^\circ) [\text{V}]$; determine:

- a) a amplitude;
- b) o valor eficaz;
- c) a frequência (temporal) e o período;
- d) o valor da tensão em $t = 2,09\text{ms}$;
- e) os instantes em que ocorre o máximo positivo.

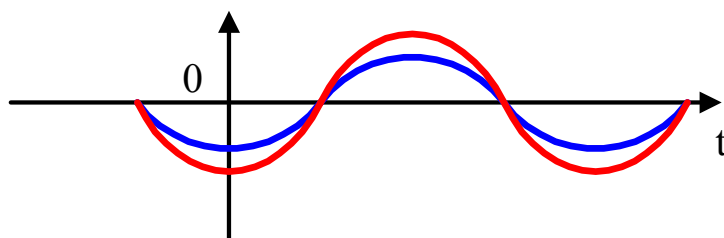
ÂNGULO DE DESFASAMENTO ENTRE DUAS FUNÇÕES SINUSOIDAIS DA MESMA FREQUÊNCIA

Duas funções da mesma frequência estão desfasadas (no tempo) quando os respectivos máximos não são simultâneos.



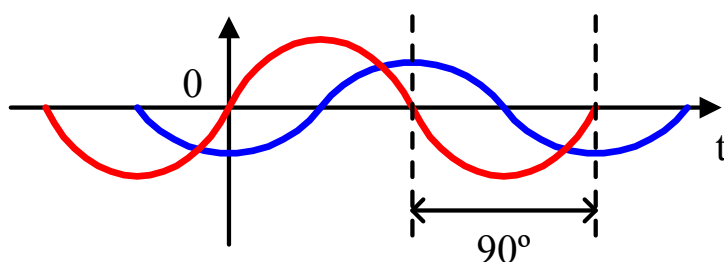
Valores particulares do ângulo de desfasamento, φ

- em fase, $\varphi=0$



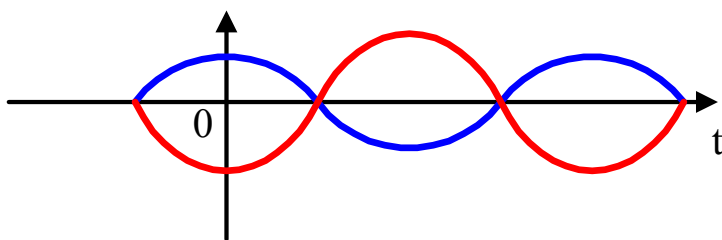
Zeros e extremos coincidentes no tempo.

- em quadratura, $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$



Os extremos de uma ocorrem nos zeros da outra.

- em oposição de fase



O máximo de uma coincide com o mínimo da outra; anulam-se ambas no mesmo instante, mas são sempre de sinal oposto.

Determinação do desfasamento

Sejam $v_1(t)$ e $v_2(t)$ duas grandezas alternadas sinusoidais da mesma frequência:

$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Designa-se por ângulo de desfasamento (ou desfasagem, ou diferença de fase) de $v_1(t)$ relativamente a $v_2(t)$ ao ângulo Φ_{v_1, v_2} tal que:

$$\Phi_{v_1, v_2} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Note que:

- o ângulo de desfasamento de $v_1(t)$ relativamente a $v_2(t)$ é o simétrico do ângulo de desfasamento de $v_2(t)$ relativamente a $v_1(t)$.

Exercício A50

Determine o desfasamento entre $v_1(t) = 4 \cos(1000t - 40^\circ)$ e $v_2(t)$ e diga qual das duas funções está em avanço:

- | | |
|--|---|
| a) $v_2(t) = 3 \sin(1000t + 40^\circ)$ | c) $v_2(t) = 5 \sin(1000t - 180^\circ)$ |
| b) $v_2(t) = 3 \cos(1000t + 40^\circ)$ | d) $v_2(t) = 4 \sin(1500t - 40^\circ)$ |

REPRESENTAÇÃO VECTORIAL DE UMA GRANDEZA ALTERNADA SINUSOIDAL

Pode-se associar uma grandeza alternada sinusoidal a um vector:

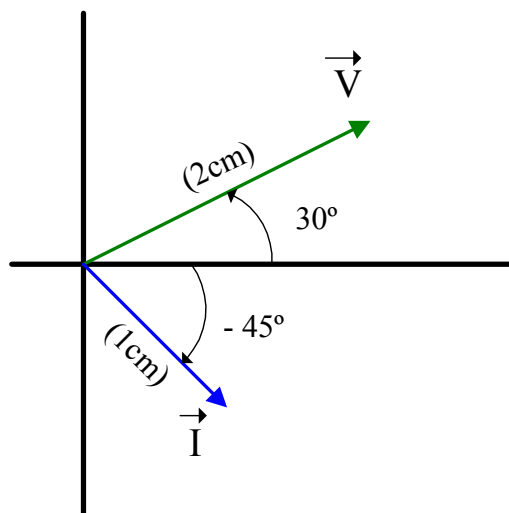
- amplitude (ou valor eficaz) $\longrightarrow$ comprimento do vector
- ângulo de fase $\longrightarrow$ ângulo com o semi-eixo horizontal positivo

Exemplo:

$$v(t) = 10 \cos (100t + 30^\circ) \text{ [V]}$$

$$i(t) = 1 \cos (100t - 45^\circ) \text{ [A]}$$

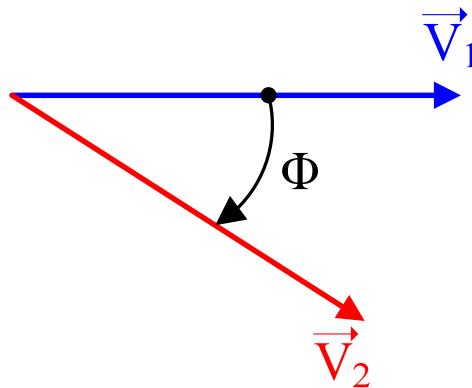
escala:
5V ---- 1 cm
1A ---- 1 cm



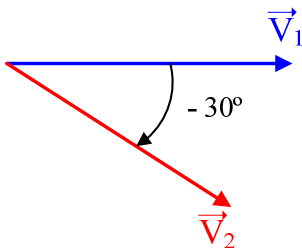
$\longrightarrow$ É um método com limitações; a análise de circuitos que contenham um número elevado de elementos é muito trabalhosa e pode dar origem a erros importantes.

Desfasamento entre grandezas representadas vectorialmente

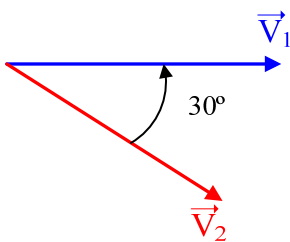
Sejam $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ a representação vectorial de duas grandezas sinusoidais da mesma frequência $v_1(t)$ e $v_2(t)$, respectivamente; o desfasamento de $v_1(t)$ relativamente a $v_2(t)$ é o ângulo orientado do vector $\vec{V}_1$ para o vector $\vec{V}_2$:



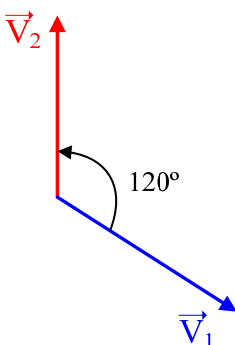
Exemplos:



- O desfasamento entre v_1 e v_2 é de $\Phi = -30^\circ$
- O ângulo é negativo, pois é medido no sentido negativo
- v_1 em avanço (ou v_2 em atraso)



- O desfasamento entre v_2 e v_1 é de $\Phi = +30^\circ$
- O ângulo é positivo, pois é medido no sentido positivo
- v_1 em avanço (ou v_2 em atraso)



- O desfasamento entre v_1 e v_2 é de $\Phi = +120^\circ$
- O ângulo é positivo, pois é medido no sentido positivo
- v_2 em avanço (ou v_1 em atraso)
- O desfasamento entre v_2 e v_1 é de $\Phi = -120^\circ$

Exercício A51

1. Considere o seguinte circuito, em que Z_1 e Z_2 são dois elementos de circuito passivos, percorridos por $i_1(t)=6\sqrt{2}\sin(100\pi t-\pi/6)$ [A] e $i_2(t) = 4\sqrt{2} \sin (100\pi t + \pi/2)$ [A]

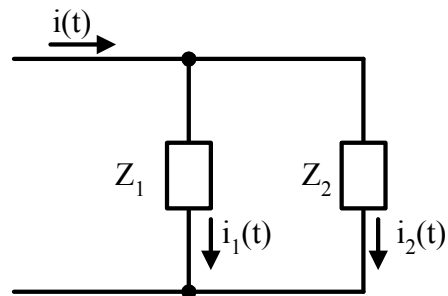
a) Faça a representação vectorial das correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$

b) determine vectorialmente o valor eficaz e a fase de $i(t)$

c) escreva $i(t)$ na forma

$$A \sin(\omega t + \varphi)$$

d) determine $i_1(t) - i_2(t)$ e $i_2(t) - i_1(t)$.



2. Para cada uma das alíneas seguintes, indique qual das grandezas $i_1(t)$ ou $i_2(t)$ está em avanço:

a) o desfasamento entre $i_1(t)$ e $i_2(t)$ é de -22°

b) o desfasamento entre $i_2(t)$ e $i_1(t)$ é de -45°

c) o desfasamento entre $i_2(t)$ e $i_1(t)$ é de 375°

d) o desfasamento entre $i_1(t)$ e $i_2(t)$ é de -170°

e) o desfasamento entre $i_1(t)$ e $i_2(t)$ é de 270° .

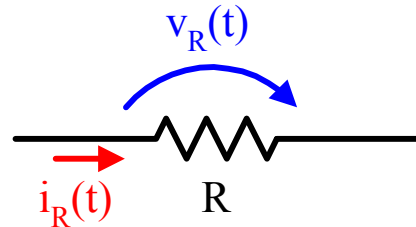
3. Repita o exercício A50, usando a representação vectorial das funções sinusoidais.

ELEMENTOS DE CIRCUITO EM CA

RESISTÊNCIA

→ Relação tensão-corrente

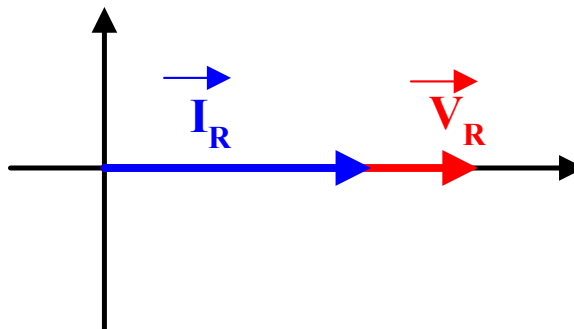
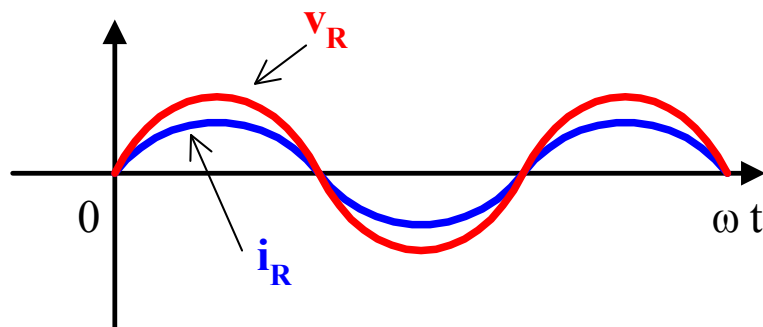
$$v_R(t) = R i_R(t)$$



- se $v_R(t) = V_R \sin(\omega t)$

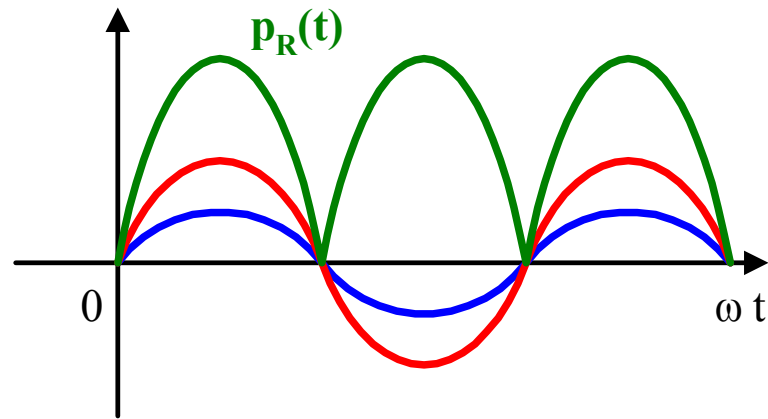
$$\text{então } i_R(t) = \frac{V_R}{R} \sin(\omega t) = I_R \sin(\omega t)$$

→ tensão e corrente estão em fase



→ Potência instantânea absorvida

$$p_R(t) = v_R(t) \cdot i_R(t)$$



como a $p_R(t) \geq 0$ (potência absorvida ≥ 0), então:

a resistência absorve (dissipa) sempre energia (potência)

→ Potência média (absorvida) ou potência dissipada ou potência activa

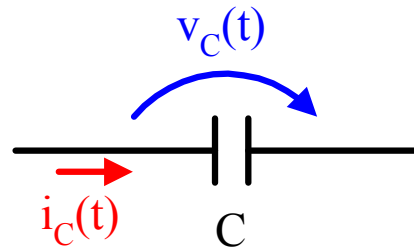
P_R = valor médio da potência instantânea num período

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot i(t) dt = \\ &= V_{\text{Ref}} \cdot I_{\text{Ref}} = R \cdot I_{\text{Ref}}^2 = \frac{V_{\text{Ref}}^2}{R} \end{aligned}$$

CONDENSADOR

→ Relação tensão-corrente

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$



- se $v_C(t) = V_C \sin(\omega t)$

então

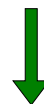
$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{d}{dt} [V_C \sin(\omega t)] = C V_C \omega \cos(\omega t) = \\ &= C V_C \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow i_C(t) = I_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

→ note que $I_C = C V_C \omega$

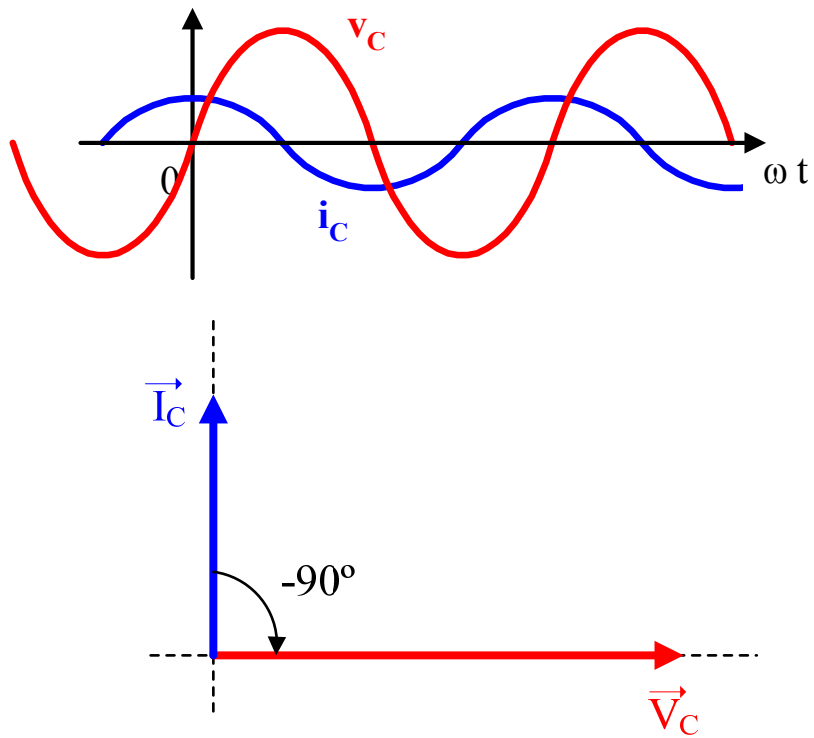
a amplitude da corrente no condensador aumenta com a frequência da tensão

→ desfaseamento entre corrente e tensão

$$\varphi_{i,v} = \theta_v - \theta_i = 0 - 90^\circ = -90^\circ < 0$$

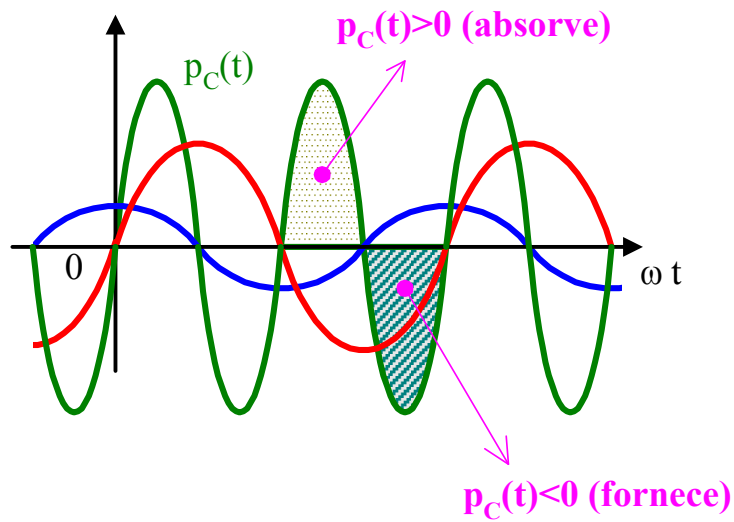


corrente em avanço de 90° em relação à tensão



➔ Potência instantânea absorvida

$$p_C(t) = v_C(t) \cdot i_C(t)$$



-
- em certos intervalos de tempo $p_C(t) \geq 0$



o condensador absorve energia

- noutros intervalos de tempo $p_C(t) \leq 0$



o condensador fornece energia
(fornece a energia que absorveu)

$$P_{\text{absorvida}} = P_{\text{fornecida}}$$

→ Potência média (absorvida) ou potência dissipada ou potência activa

P_C = valor médio da potência instantânea num período

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot i(t) dt = 0$$

- chega-se à mesma conclusão observando que

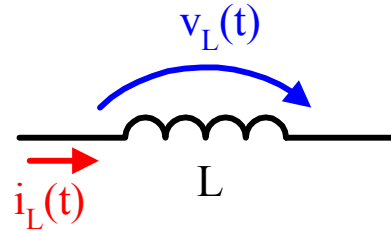
$$P_{\text{absorvida}} = P_{\text{fornecida}}$$

→ o condensador (ideal) não dissipa energia (potência)

BOBINA

→ Relação tensão-corrente

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$



- se $i_L(t) = I_L \sin(\omega t)$

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} [I_L \sin(\omega t)] = L I_L \omega \cos(\omega t) \Rightarrow$$

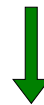
então $\Rightarrow v_L(t) = V_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

→ note que $V_L = L I_L \omega$

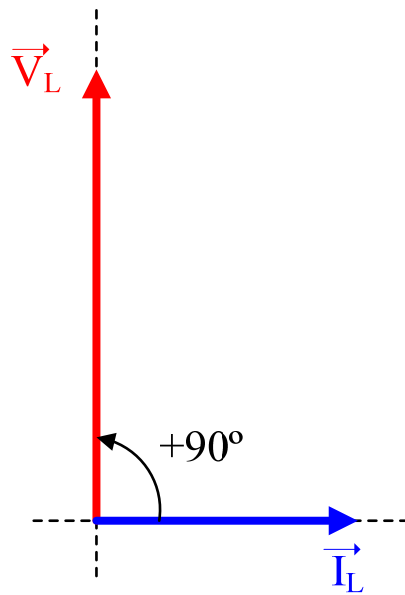
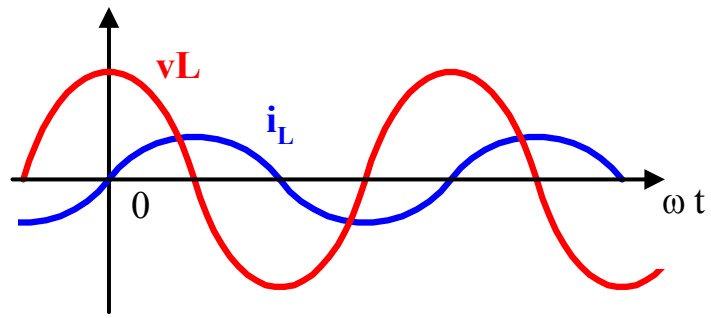
a amplitude da tensão na bobina aumenta com a sua frequência

→ defasamento entre corrente e tensão

$$\varphi_{i,v} = \theta_v - \theta_i = 90^\circ - 0 = 90^\circ > 0$$



corrente em atraso de 90° em relação à tensão



➔ Potência instantânea absorvida

$$p_L(t) = v_L(t) \cdot i_L(t) \text{ (representação gráfica análoga à o condensador)}$$

- em certos intervalos de tempo $p_L(t) \geq 0$



a bobina absorve energia

- noutros intervalos de tempo $p_L(t) \leq 0$



a bobina fornece energia
(fornece a energia que absorveu)

$$p_{\text{absorvida}} = p_{\text{fornecida}}$$

➔ Potência média (absorvida) ou potência dissipada ou potência activa

P_L = valor médio da potência instantânea num período

- Tal como para o condensador

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot i(t) dt = 0$$

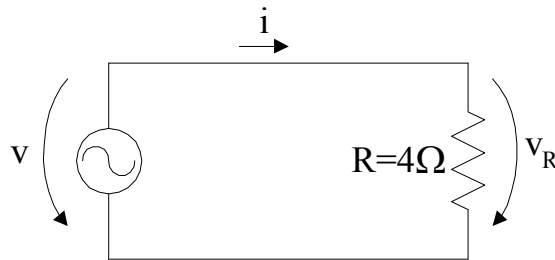
-
- chega-se à mesma conclusão observando que

$$p_{\text{absorvida}} = p_{\text{fornecida}}$$

→ a bobina (ideal) não dissipa energia (potência)

Exercício A52

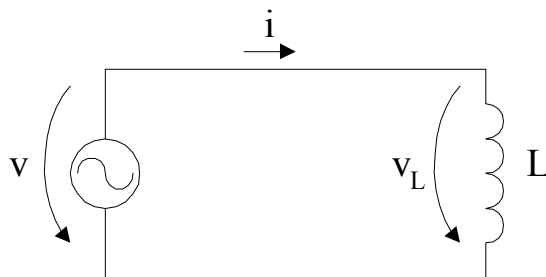
No seguinte circuito a corrente é $i(t) = 2,5 \sin(500\pi t)$ [A].



- Determine $v_R(t)$ e $v(t)$.
- Represente a corrente e as tensões indicadas, graficamente, no tempo e vectorialmente.
- Determine e represente graficamente no tempo a potência instantânea, $p(t)$.
- Determine a potência dissipada em R.

Exercício A53

A bobina representada no circuito tem um coeficiente de auto-indução de 30mH e é percorrida por uma corrente alternada sinusoidal de valor eficaz 7A, frequência 8Hz.



- Determine $v_L(t)$, $v(t)$ e $i(t)$. Represente-as graficamente no tempo; a tensão $v_L(t)$ está em atraso ou em avanço em relação a $i(t)$?

-
- b) Represente vectorialmente as grandezas indicadas no circuito.
 - c) Determine a oposição que a bobina oferece à passagem da corrente.
 - d) Determine a potência instantânea, $p(t)$. Compare a frequência de $p(t)$ com a de $i(t)$; represente estas duas grandezas no tempo.
 - e) Determine a potência activa; o que conclui?
 - f) Determine a amplitude das grandezas indicadas no circuito.

NÚMEROS COMPLEXOS

➡ Sem perder de vista a teoria que está subjacente aos n^{os} complexos, o aluno deve habituar-se, sempre que possível, a utilizar a máquina de calcular.

➡ É de especial utilidade as funções $R \rightarrow P$ (rectangular $\rightarrow$ polar) e $P \rightarrow R$ (polar $\rightarrow$ rectangular) existente na maioria das máquinas de calcular.

Exercício A54

Diga em que quadrante do plano estão os números complexos seguintes e escreva-os nas formas exponencial e polar:

a) $\bar{Z} = -2 + 4j$

b) $\bar{Z} = -2 - 6j$

c) $\bar{Z} = 4 + 2j$

d) $\bar{Z} = 6 - 2j$

Exercício A55

Diga em que quadrante do plano estão os seguintes números complexos e escreva-os na forma rectangular:

a) $\bar{Z} = 5 \cos 30^\circ - j 5 \sin 30^\circ$

b) $\bar{Z} = 10 e^{-j45^\circ}$

c) $\bar{Z} = 12 \angle 30^\circ$

d) $\bar{Z} = 5e^{j\frac{\pi}{6}}$

Exercício A56

Represente na forma polar os seguintes números complexos:

a) $\bar{Y} = \frac{(3 + 6j) + 5 \angle 20^\circ}{4 + 6j + 6}$

b) $\bar{Z} = \frac{10e^{-j\pi/7} + 4 \angle 25^\circ}{(4 - 5j)(4 + 5j)}$

c) $3e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{4j \cdot 6e^{j\frac{\pi}{3}} + 5 \angle 28^\circ}{10 \angle 45^\circ}$

REPRESENTAÇÃO DE GRANDEZAS

ALTERNADAS SINUSOIDAIS POR FASORES

(amplitude complexa, representação simbólica, representação vectorial)

(Fasor, do inglês “Phasor”)

É possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre funções sinusoidais duma dada frequência ω , e o conjunto dos números complexos, de acordo com o esquema:

$$\underset{\text{(domínio do tempo)}}{v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha)} \xleftrightarrow{\text{red arrow}} \underset{\text{(domínio da frequência)}}{\bar{V} = V_M \angle \alpha}$$

em que:

- $\bar{V}$ é o fasor de $v(t)$ (*phasor*)
- V_M é o módulo de $\bar{V}$ e é igual à amplitude de $v(t)$
- α é o argumento de $\bar{V}$ e é igual á fase na origem de $v(t)$

➡ definir-se-á o fasor a partir da função co-seno; se uma função é apresentada como seno, será transformada em co-seno:

$$\text{sen } \alpha = \cos (\alpha - 90^\circ)$$

Demonstração

A função sinusoidal

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha)$$

pode exprimir-se como:

$$v(t) = \operatorname{Re} \left\{ \bar{V} e^{j\omega t} \right\}$$

- demonstração

usando a fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

pode-se escrever

$$e^{j(\omega t + \alpha)} = \cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow$$

$$e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha} = \cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow$$

$$\underbrace{V_M \cdot e^{j\alpha}}_{\bar{V}} e^{j\omega t} = V_M \cos(\omega t + \alpha) + j V_M \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow$$

$$\bar{V} \cdot e^{j\omega t} = V_M \cos(\omega t + \alpha) + j V_M \sin(\omega t + \alpha)$$

pelo que se vê facilmente que

$$\operatorname{Re} \left\{ \bar{V} e^{j\omega t} \right\} = V_M \cos(\omega t + \alpha) = v(t)$$

Que vantagens há em representar as funções sinusoidais por amplitudes complexas?

- as funções sinusoidais são facilmente expressas em fasores, que são mais simples de trabalhar do que as funções seno ou co-seno.
- possibilidade de substituir certas operações sobre funções sinusoidais, por correspondentes operações sobre as amplitudes complexas, que são simplesmente operações da álgebra dos números complexos; permite uma grande simplificação dos cálculos.

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES SINUSOIDAIS

Considere-se duas funções sinusoidais da mesma frequência ω

$$v_1(t) = V_{M1} \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$v_2(t) = V_{M2} \cos(\omega t + \alpha_2)$$

→ Soma algébrica de funções sinusoidais

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \iff \bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$$

A soma de funções sinusoidais no domínio do tempo equivale à soma dos respectivos fasores no domínio da frequência.

Demonstração

$$\begin{aligned} v(t) = v_1(t) + v_2(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \bar{V}_1 e^{j\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \bar{V}_2 e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ (\bar{V}_1 + \bar{V}_2) e^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

donde se conclui que a amplitude complexa da soma é:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$$

→ Derivação em ordem ao tempo

$$f(t) = \frac{dv(t)}{dt} \iff \bar{F} = j\omega \bar{V}$$

A derivação em ordem ao tempo de uma função sinusoidal, no domínio do tempo, é equivalente à multiplicação do respectivo fasor por $j\omega$, no domínio da frequência.

Demonstração

Seja $f(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, então

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \left\{ \bar{V} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \bar{V} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ j\omega \bar{V} e^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

donde se conclui que a amplitude complexa da derivada é:

$$\bar{F} = j\omega \bar{V}$$

→ Primitivação

$$g(t) = \int v(t) dt \iff \bar{G} = \frac{1}{j\omega} \bar{V}$$

A primitivação em ordem ao tempo de uma função sinusoidal, no domínio do tempo, é equivalente à divisão do respectivo fasor por $j\omega$, no domínio da frequência.

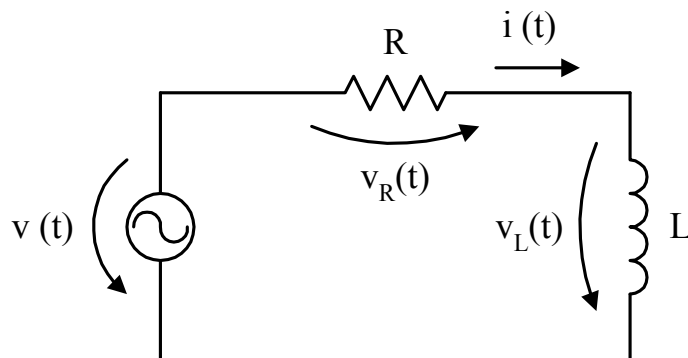
Demonstração

Procede-se como no caso da derivação; conclui-se, por essa via, que a amplitude complexa da primitiva é:

$$\bar{G} = \frac{1}{j\omega} \bar{V}$$

Exemplo: resolução da equação diferencial utilizando números complexos.

Determinar $i(t)$ sabendo que $v(t) = 100 \cos(100\pi t)$ [V], $R=100\Omega$ e $L = 500\text{mH}$.



-
- usando a lei das malhas:

$$v_L(t) + v_R(t) = v(t)$$

como

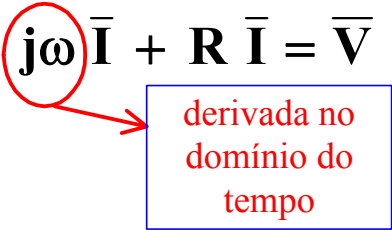
$$v_R = R i$$

$$v_L = L(di/dt)$$

então

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = v(t)$$

de acordo com as operações definidas anteriormente, fica:

$$L \mathbf{j\omega} \bar{I} + R \bar{I} = \bar{V}$$


derivada no
domínio do
tempo

pelo que:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L}$$

(note a semelhança com a Lei de Ohm)

com

$$\bar{V} = 100 \angle 0^\circ \text{ V (fasor de } v(t))$$

$$R = 100\Omega$$

$$L = 500\text{mH}$$

$$\omega = 100\pi \text{ rad/s}$$

fica

$$\bar{I} = \frac{100 \angle 0^\circ}{100 + j157,1} = \frac{100 \angle 0^\circ}{186,2 \angle 57,5^\circ} = \frac{100}{186,2} \angle (0^\circ - 57,5^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{I} = 0,54 \angle -57,5^\circ \text{ V}$$

que, no domínio do tempo, se escreve:

$$i(t) = 0,54 \cos(100\pi t - 57,5^\circ) \text{ [A]}$$

Exercício A57

Escreva as seguintes tensões e correntes no domínio do tempo como amplitudes complexas nas formas polar e rectangular:

a) $v(t) = 30 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ [V]}$

b) $i(t) = 2\sqrt{2} \cos(100\pi t + 30^\circ) \text{ [A]}$

c) $v(t) = 50 \sin 150\pi t \text{ [V]}$

d) $i(t) = \cos 150\pi t \text{ [A]}$

e) $v(t) = \sqrt{2} 50 \sin\left(1500 t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ [V]}$

f) $i(t) = 2 \cos\left(2000 t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ [A]}$

Exercício A58

As tensões e correntes das alíneas seguintes estão escritas no domínio da frequência. Escreva-as no domínio do tempo, a uma frequência de 50Hz.

a) $\bar{V} = 10 - 6j \text{ V}$

b) $\bar{I} = 2\sqrt{2} \angle -30^\circ \text{ A}$

c) $\bar{I} = -2j + 6e^{-j10^\circ} \text{ A}$

d) $\bar{I} = 4 \text{ A}$

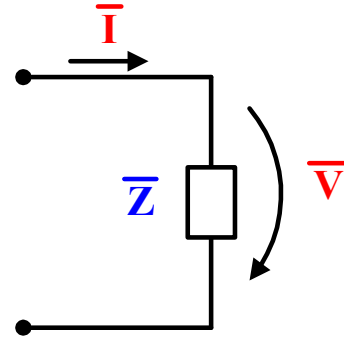
e) $\bar{V} = 40 \angle -\frac{\pi}{5} \text{ V}$

f) $\bar{V} = 40 \angle -\frac{\pi}{5} + 6 \text{ V}$

IMPEDÂNCIA

Impedância de um circuito à frequência ω , é a relação entre a tensão e a corrente no domínio da frequência:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$



- $\bar{Z}$ é uma quantidade complexa e pode ser expressa em qualquer uma das formas estudadas:

$$\bar{Z} = R + jX = Z e^{j\varphi} = Z \angle \varphi \quad [\Omega]$$

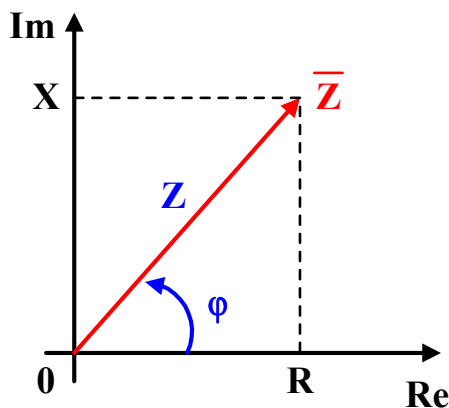
em que

$R = \text{Re}\{\bar{Z}\}$ - resistência do circuito $[\Omega]$

$X = \text{Im}\{\bar{Z}\}$ - reactância do circuito $[\Omega]$

Z : módulo da impedância $[\Omega]$

φ : argumento da impedância [rad], [graus]



$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}$$

➔ Que informações fornece a impedância?

- escrevendo a impedância como função da tensão e da corrente:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V e^{j\theta_v}}{I e^{j\theta_I}} = \frac{V}{I} e^{j(\theta_v - \theta_I)}$$

e comparando com a sua forma exponencial:

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi}$$

conclui-se que:

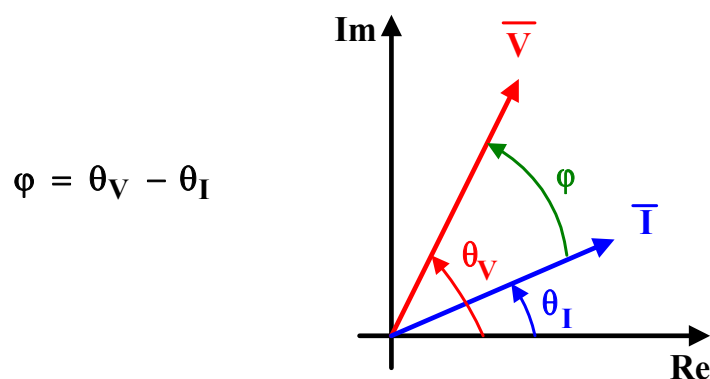
$$\bar{Z} = \left(\frac{V}{I} \right) e^{j\varphi}$$

Diagram illustrating the relationship between the complex impedance $\bar{Z}$, the magnitude Z , and the phase φ . The expression $\bar{Z} = \left(\frac{V}{I} \right) e^{j\varphi}$ is shown. A blue circle highlights $\frac{V}{I}$, which is equated to Z . A red circle highlights $e^{j\varphi}$, which is equated to $e^{j(\theta_v - \theta_I)}$.

- 1) o módulo da impedância (Z), é a relação entre as amplitudes (ou valores eficazes) da tensão e da corrente sinusoidais:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}}$$

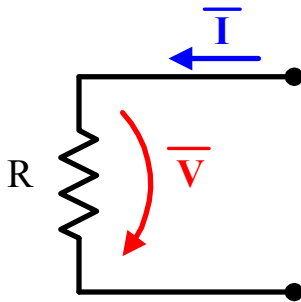
- 2) o argumento da impedância, φ , é o desfasamento da corrente relativamente à tensão:



-
- No domínio dos regimes alternados sinusoidais, a **impedância** desempenha um papel **formalmente análogo** ao da **resistência** no regime de corrente contínua.
 - O carácter complexo da impedância, traduz o facto de em CA sinusoidal, para além de uma **relação entre amplitudes**, existir também um **ângulo de desfasamento entre tensão e corrente**.
 - De forma análoga às resistências, as impedâncias podem ser combinadas em **série** e em **paralelo**, obedecendo às **mesmas regras já estabelecidas para as resistências**.

RELAÇÕES TENSÃO-CORRENTE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA (RESISTÊNCIA, BOBINA, CONDENSADOR)

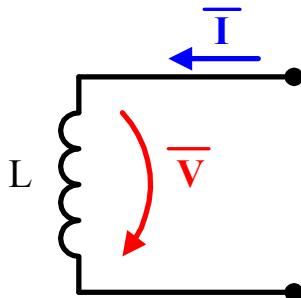
1) RESISTÊNCIA



$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R$$

a impedância tem apenas parte real

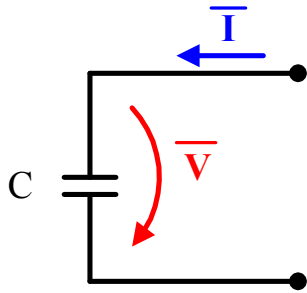
2) BOBINA



$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = j \omega L = \omega L e^{j 90^\circ}$$

a impedância tem apenas
parte imaginária **(positiva)**
(reactância indutiva)

3) CONDENSADOR



$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j 90^\circ}$$

a impedância tem apenas
parte imaginária **(negativa)**
(reactância capacitiva)

ADMITÂNCIA

É o inverso da impedância:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = G + jS$$

em que:

$\bar{Y}$: admitância [S]

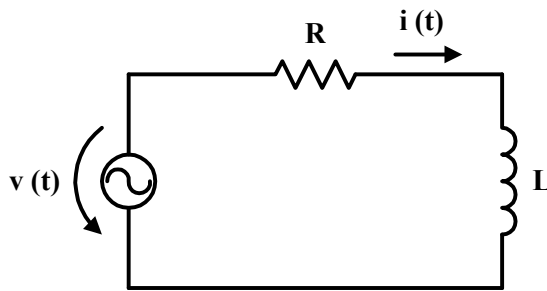
$G = \text{Re}\{\bar{Y}\}$: condutância [S]

$S = \text{Im}\{\bar{Y}\}$: susceptância [S]

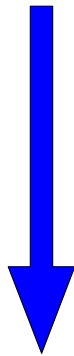
Exemplo:

→ resolução do exemplo anterior, colocando o circuito no domínio da frequência:

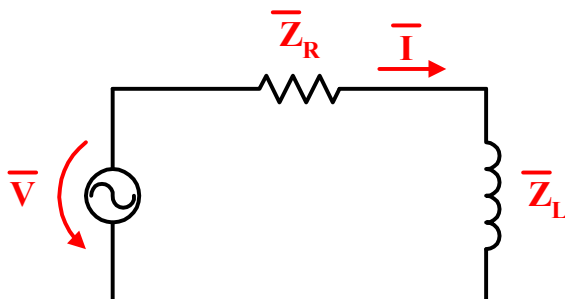
Determinar $i(t)$ sabendo que $v(t)=100 \cos(100\pi t)$ [V], $R=100\Omega$ e $L = 500\text{mH}$.



domínio do
tempo



dom. tempo	dom. freq.
R	$\bar{Z}_R = R$
L	$\bar{Z}_L = j\omega L$
$v(t)$	$\bar{V}$
$i(t)$	$\bar{I}$



domínio da
frequência

A impedância da resistência é:

$$\bar{Z}_R = R = 100\Omega$$

a impedância da bobina é:

$$\bar{Z}_L = j\omega L = j100\pi \cdot 500 \cdot 10^{-3} = j157,1\Omega$$

(reactância indutiva)

As duas impedâncias estão em série, pelo que a impedância total do circuito é a sua soma:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L = 100 + j157,1 = 186,2 \angle 57,5^\circ \Omega$$

Da definição de impedância:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}}$$

*(expressão
formalmente idêntica
à Lei de Ohm)*

Sendo a amplitude complexa da tensão:

$$\bar{V} = 100 \angle 0^\circ = 100 \text{ V}$$

(note que a tensão está escrita como um co-seno; se estivesse escrita como um seno, seria primeiro convertida num co-seno, e só então se determinaria a amplitude complexa)

então, a corrente é:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{186,2 \angle 57,5^\circ} = 0,54 \angle -57,5^\circ \text{ A}$$

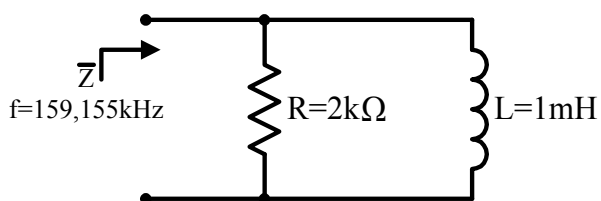
que, passando para o domínio do tempo, fica:

$$\bar{I} = 0,54 \angle -57,5^\circ \text{ A} \rightarrow i(t) = 0,54 \cos(100\pi t - 57,5^\circ) \text{ A}$$

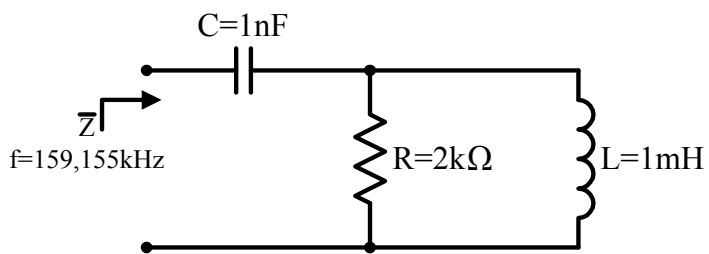
Note que o processo utilizado na análise do circuito é formalmente idêntico ao que foi utilizado nos circuitos de corrente contínua.

Exercício A59

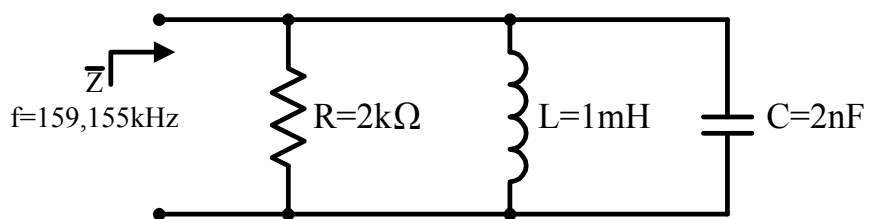
Determine a impedância de cada um dos circuitos à frequência indicada. Represente, para cada um deles, um circuito série equivalente.



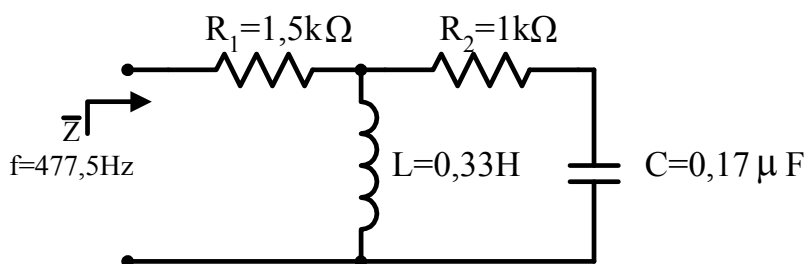
a)



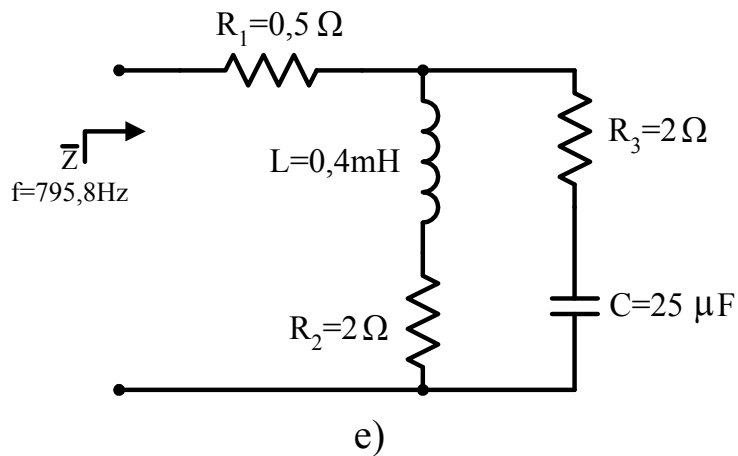
b)



c)

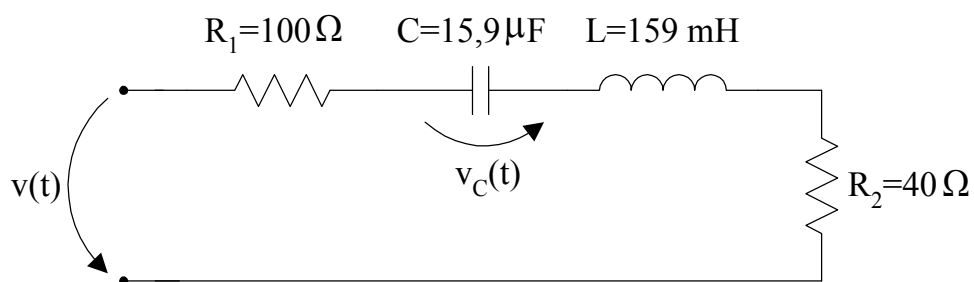


d)



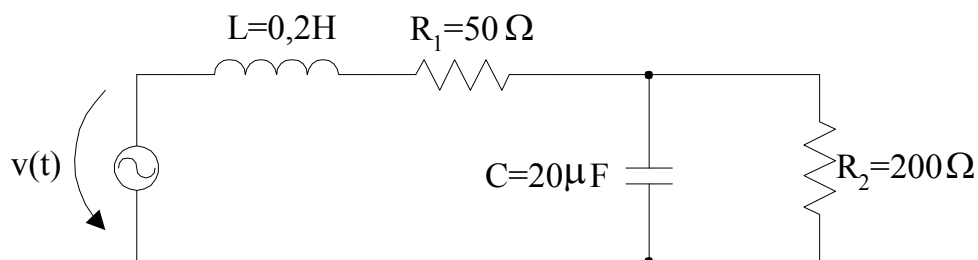
Exercício A60

Usando o conceito de divisor de tensão, determine a tensão no condensador (no domínio do tempo), sabendo que $V_{\text{ef}}=230\text{V}$, $f=50\text{Hz}$.



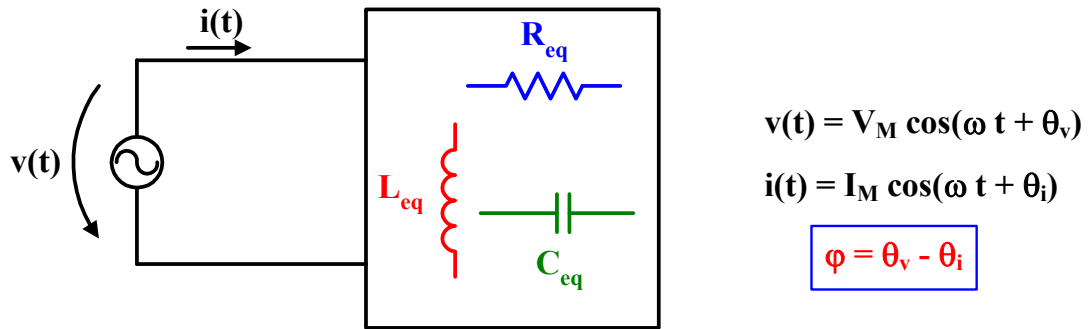
Exercício A61

Para o circuito da figura seguinte determine, no domínio do tempo, a corrente fornecida pela fonte, em que $v(t) = 110\sqrt{2} \sin(100\pi t + 70^\circ)$ [V]. Represente o diagrama vectorial das tensões e correntes no circuito.



POTÊNCIA ACTIVA, REACTIVA E APARENTE

Considere-se um circuito com resistências, condensadores e bobinas:



O ângulo de defasamento entre corrente e tensão é:

$$\varphi = \theta_v - \theta_i$$

POTÊNCIA ACTIVA, P (POWER, REAL POWER)

Como se viu anteriormente, potência activa (ou potência média, ou potência dissipada), é o valor médio da potência instantânea e, no caso da CA, é dada por:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi = \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi$$

Unidade: **Watt [W]**

→ A potência activa é a potência **medida por um Wattímetro**.

-
- No circuito da figura, é a potência activa que é dissipada na resistência (em calor).
 - Por exemplo, na alimentação de um motor, é a potência activa que (se fosse $\eta=1 \leftrightarrow$) é transformada em potência mecânica.

POTÊNCIA APARENTE, S (APARENT POWER)

A potência aparente é dada por:

$$S = V_{ef} I_{ef} = \frac{1}{2} V_M I_M$$

e, atendendo aos valores da tensão e da corrente no circuito, é a potência que "aparentemente" é absorvida pelo circuito.

- Indica a potência (activa máxima) disponível.

Unidade:

sendo o produto de uma tensão por uma corrente, dimensionalmente, a potência aparente tem as mesmas unidades que a potência activa; no entanto, para a distinguir, utiliza-se o termo **VA (volt-ampere)**.

POTÊNCIA REACTIVA, Q (REACTIVE POWER)

É uma potência que está relacionada com as energias armazenadas nos campos eléctricos (condensadores) e nos campos magnéticos (bobinas); está pois, associada à presença de elementos reactivos capazes de armazenar energia.

A potência reactiva é dada por:

$$Q = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \sin \varphi = \frac{1}{2} V_M I_M \sin \varphi$$

→ A potência reactiva contribui para o aumento da corrente de alimentação de um circuito ou instalação eléctrica.

Unidade:

Tal como no caso da potência aparente, a potência reactiva tem as mesmas unidades que a potência activa; para a distinguir, utiliza-se o termo **VAR (volt-ampere reactivo)**.

Sinal algébrico de Q

- Circuito com carácter **indutivo** $\Rightarrow \varphi > 0 \Rightarrow Q > 0$
- Circuito com carácter **capacitivo** $\Rightarrow \varphi < 0 \Rightarrow Q < 0$
- Circuito **resistivo** $\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Q = 0$

FACTOR DE POTÊNCIA (*POWER FACTOR*)

O factor de potência (FP) é a razão entre a potência activa e a potência aparente:

$$\mathbf{FP = \frac{P}{S}}$$

(definição geral)

→ Dá uma indicação do modo como a potência activa (máxima) disponível está a ser utilizada pelo circuito ou instalação eléctrica.

Particularizando para o regime alternado sinusoidal, tem-se

$$\mathbf{FP = \frac{P}{S} = \frac{V_{ef} I_{ef} \cos \varphi}{V_{ef} I_{ef}} \Rightarrow FP = \cos \varphi}$$

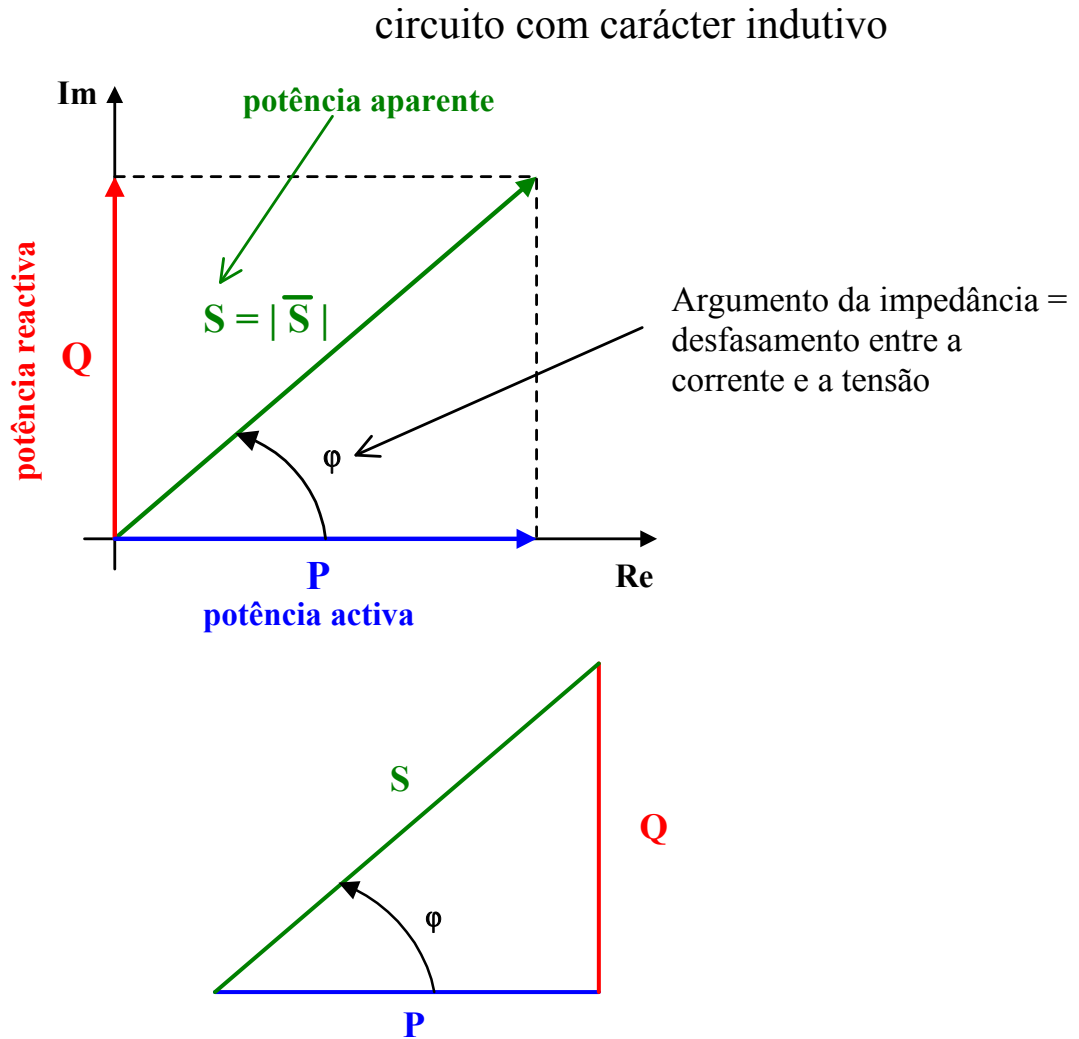
→ FP = 1 significa que o circuito ou instalação eléctrica é resistivo, i.e.:

$$\mathbf{S = P, Q = 0}$$

→ Já que o FP, por si só, não fornece informação sobre o carácter do circuito, indica-se sempre se o FP é capacitivo ou indutivo.

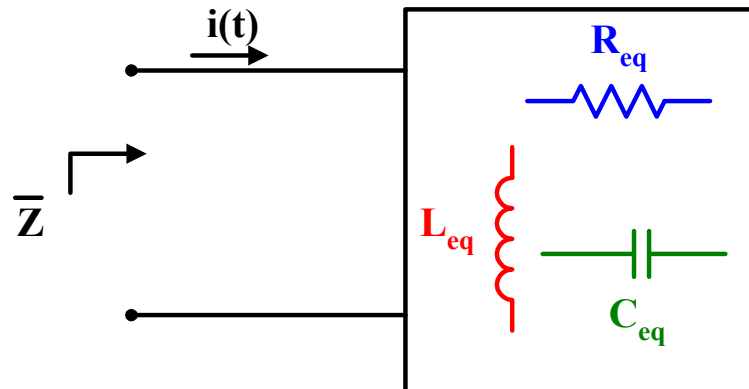
TRIÂNGULO DAS POTÊNCIAS

As potências activa, aparente e reactiva, formam um triângulo rectângulo do seguinte modo:



- $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- $P = S \cos \varphi = S \cdot \text{FP}$
- $Q = S \sin \varphi$

OUTRAS EXPRESSÕES PARA CALCULAR P, Q, S, FP



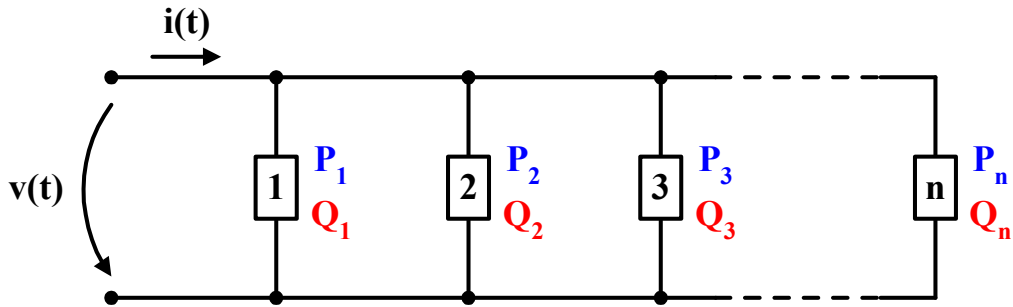
$$\bar{Z} = R_{eq} + j X_{eq}$$

É possível demonstrar que:

- $P = R_{eq} I_{ef}^2$
- $Q = X_{eq} I_{ef}^2$
- $S = Z I_{ef}^2$
- $FP = \frac{R_{eq}}{Z}$

ELEMENTOS LIGADOS EM PARALELO E POTÊNCIA

Considere-se, numa instalação eléctrica, um conjunto de elementos ligados em paralelo:



então:

$$P_{\text{tot}} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \quad (\text{porquê?})$$

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \quad (\text{porquê?})$$

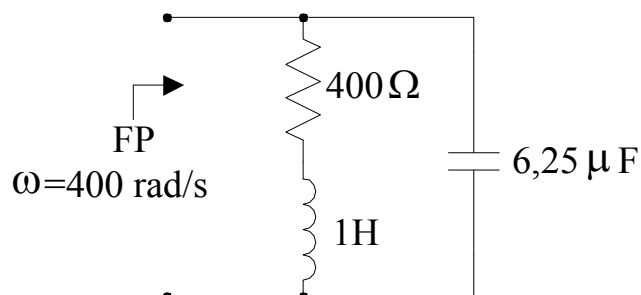
$$S_{\text{tot}} = \sqrt{P_{\text{tot}}^2 + Q_{\text{tot}}^2} \quad (\text{porquê?})$$

$$\text{FP}_{\text{circuito}} = \frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}} \quad (\text{porquê?})$$

Exercício A62

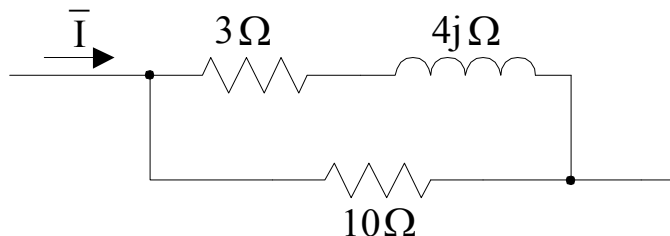
Determine o factor de potência associado aos seguintes circuitos:

a)

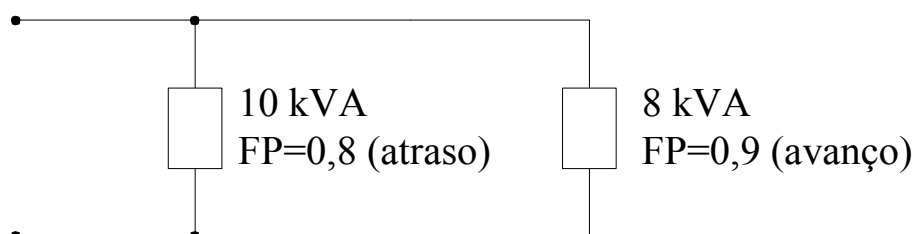


b) um circuito indutivo que absorve uma potência de $6,9\text{kW}$ a uma tensão de 230V_{RMS} e a uma corrente de 33A_{RMS} ;

c)



d)



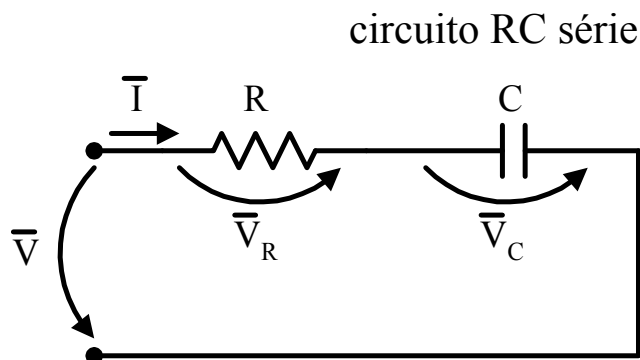
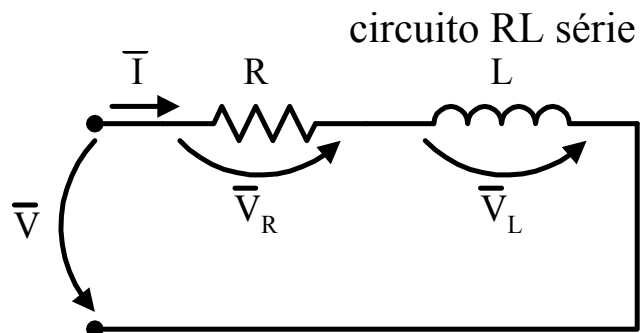
Exercício A63

Um circuito com dois elementos em série absorve uma potência média de 940W com um $FP=0,707$ em avanço. Determine os elementos do circuito sabendo que a tensão aplicada é $v(t) = 99 \cos(6000 t + 30^\circ) [V]$.

Exercício A64

Considere os circuitos representados nas figuras seguintes. Para cada um deles:

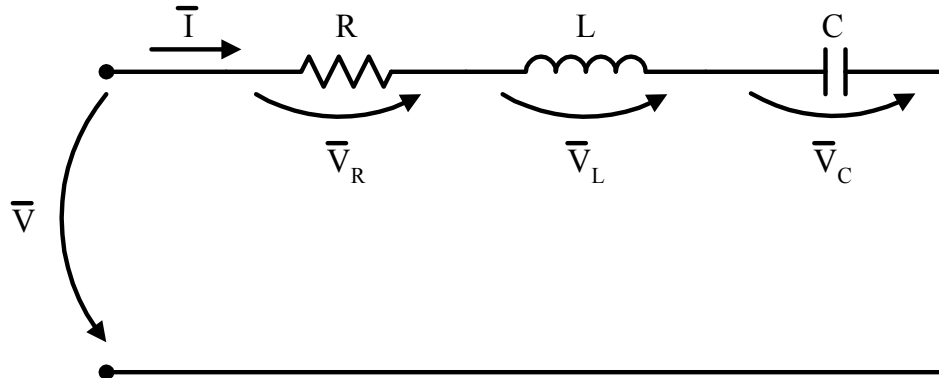
- determine a impedância do circuito "vista" pela fonte de alimentação;
- represente o diagrama vectorial das tensões e da corrente;
- represente o diagrama temporal das tensões e da corrente;
- represente o triângulo das potências.



ESTUDO DO CIRCUITO RLC SÉRIE

RESSONÂNCIA

Considere o circuito RLC série da figura:



Usando a Lei das malhas:

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C \Rightarrow \bar{V} = R \bar{I} + j \omega L \bar{I} - j \frac{1}{\omega C} \bar{I} \Rightarrow$$

$$\bar{V} = \left[R + j \omega L - j \frac{1}{\omega C} \right] \bar{I}$$

IMPEDÂNCIA

Observando a expressão anterior, conclui-se que:

$$\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

➡ A presença simultânea de um elemento indutivo e de um elemento capacitivo, confere à impedância a possibilidade de apresentar carácter indutivo, capacitivo ou resistivo puro.

1) carácter indutivo

$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \text{Im}\{Z\} > 0$$

2) carácter capacitivo

$$\omega L < \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \text{Im}\{Z\} < 0$$

3) carácter resistivo puro (ressonância)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \text{Im}\{Z\} = 0$$

- quando se verifica a condição:

$$\text{Im}\{\bar{Z}\} = 0$$

(condição de ressonância)

diz-se que o circuito está em ressonância; nestas condições, o circuito tem comportamento resistivo puro:

$$\bar{Z} = R$$

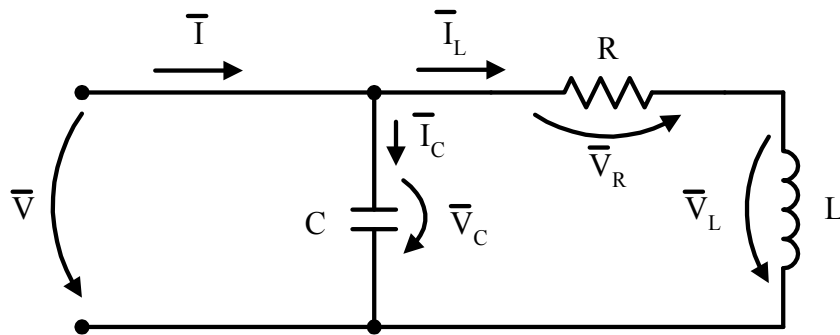
-
- na ressonância:
 - a **impedância** do circuito RLC série tem o seu valor **mínimo**, pelo que, a corrente atinge o seu valor máximo;
 - o argumento da impedância é nulo;
 - o FP é unitário.
 - a frequência de ressonância, ω_0 , obtém-se a partir da condição de ressonância:

$$\text{Im}\{\bar{Z}\} = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ESTUDO DO CIRCUITO RL SÉRIE // COM C

Considere o circuito RL série em paralelo com C:



Usando a Lei das malhas:

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L \Rightarrow \bar{V} = (R + j\omega L) \bar{I}_L \quad [1]$$

$$\bar{V} = \bar{V}_C \Rightarrow \bar{V} = -j \frac{1}{\omega C} \bar{I}_C \quad [2]$$

de [1]:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \bar{V} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \bar{V} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \bar{V}$$

de [2]:

$$\bar{I}_C = j\omega C \bar{V}$$

usando a lei dos nós:

$$\bar{I} = \bar{I}_C + \bar{I}_L \Rightarrow$$

$$\bar{I} = \left[\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \right] \bar{V}$$

ADMITÂNCIA E IMPEDÂNCIA

Observando a expressão anterior, conclui-se que a admitância do circuito é:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

➡ Tal como no caso do circuito RLC série, a presença simultânea de um elemento indutivo e de um elemento capacitivo, confere à admitância (impedância) a possibilidade de apresentar carácter indutivo, capacitivo ou resistivo puro.

➡ considerando o caso em que o circuito tem carácter resistivo puro (ressonância):

$$\text{Im}\{\bar{Z}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{Y}_0 = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

ou

$$Z_0 = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R}$$

-
- para o circuito RL//C, na ressonância:

a **impedância** tem o seu valor **máximo**, pelo que, a corrente atinge o seu valor mínimo.

- a frequência de ressonância, ω_0 , obtém-se a partir da condição de ressonância:

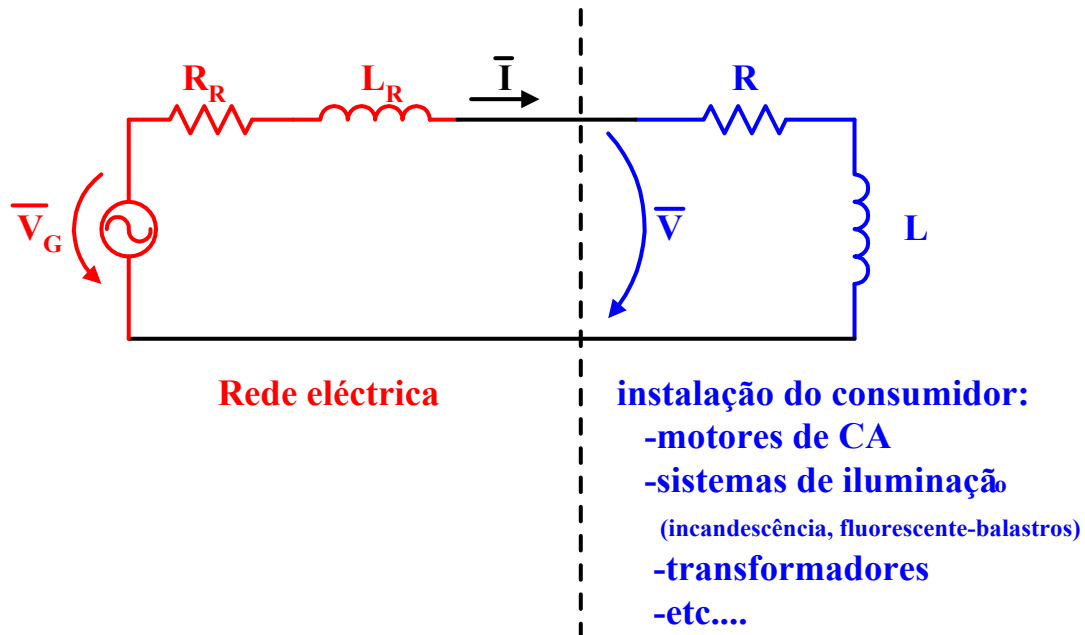
$$\text{Im}\{\bar{Z}\} = 0 \Rightarrow \text{Im}\{\bar{Y}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - C R^2}{C L^2}}$$

COMPENSAÇÃO DO FACTOR DE POTÊNCIA

Modelo de uma instalação típica de utilização de energia eléctrica, ligada à rede eléctrica de alimentação:



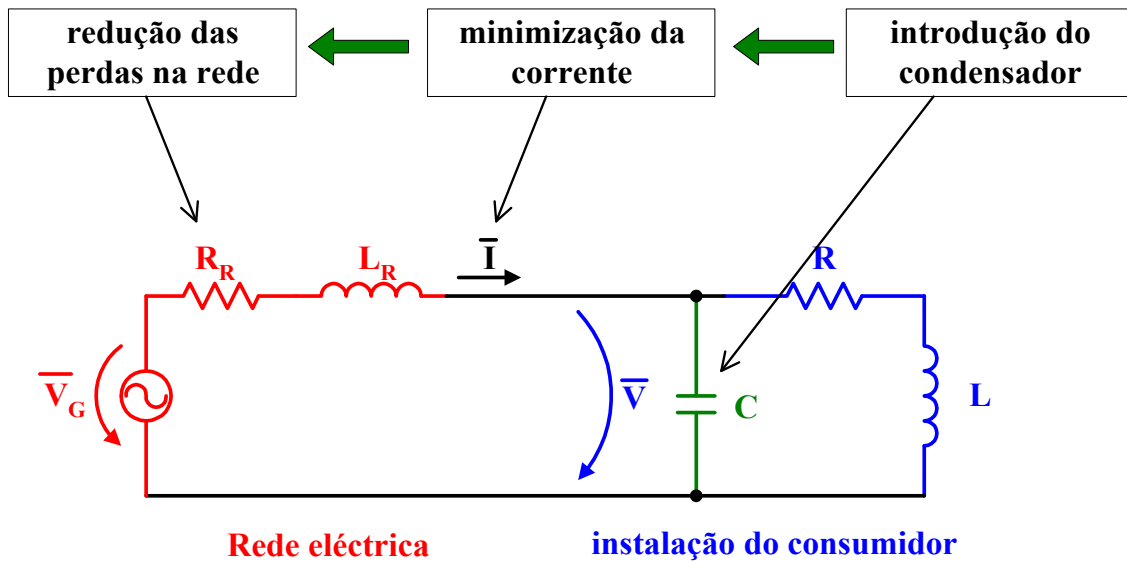
- a) A passagem da corrente $\bar{I}$ (corrente necessária para a instalação do consumidor) na resistência R_R (resistência equivalente da rede eléctrica) provoca perdas de Joule,

$$P_{R_R} = R_R I_{ef}^2;$$

- b) para melhorar o rendimento energético da rede eléctrica (interesse da companhia fornecedora de energia eléctrica) pretende-se reduzir, tanto quanto possível estas perdas;

(de que modo?)

c) do estudo do circuito $RL//C$, conclui-se que a corrente $\bar{I}$ (e, portanto, as perdas em R_R) pode ser minimizada colocando um condensador em paralelo com a instalação do consumidor e de valor tal que a instalação se encontre na ressonância ou próximo dela.



- Se o valor de C for tal que a instalação do consumidor entra em ressonância $\Rightarrow FP_{instalação}=1$

↓
compensação **total** do FP

- Se o valor de C for tal que a instalação do consumidor está próximo da ressonância $\Rightarrow FP_{instalação}<1$ (mas próximo de 1)

↓
compensação **parcial** do FP

Qual o valor de C para que se efectue a compensação total do FP?

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

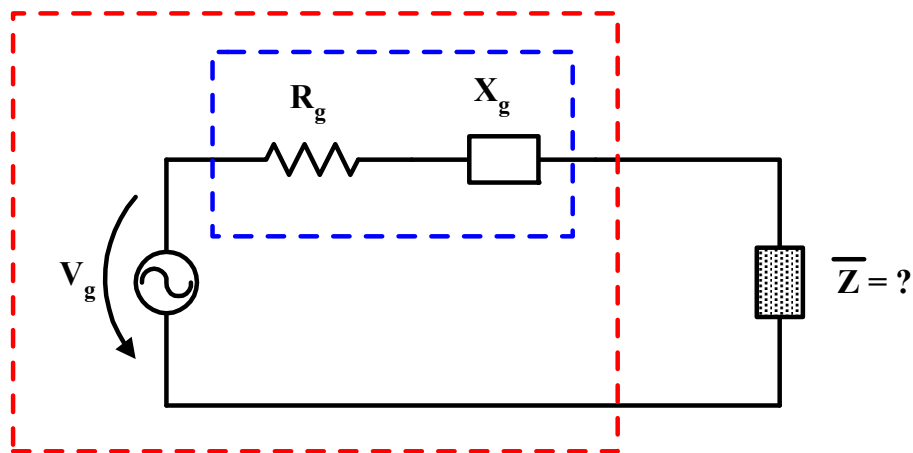
(como se obtém?)

- Principais vantagens da compensação do FP:
 - redução das perdas na rede eléctrica e consequente aumento do rendimento energético;
 - melhoria da regulação da tensão aos terminais do consumidor.
- A compensação do FP também pode ser efectuada recorrendo a motores síncronos (compensador síncrono); o estudo deste método sai fora do âmbito desta disciplina e será discutido em disciplinas mais avançadas.

MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA

ADAPTAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS

Qual o valor que deve ter a impedância de carga, para que a potência que lhe é transferida pela fonte AC seja máxima?



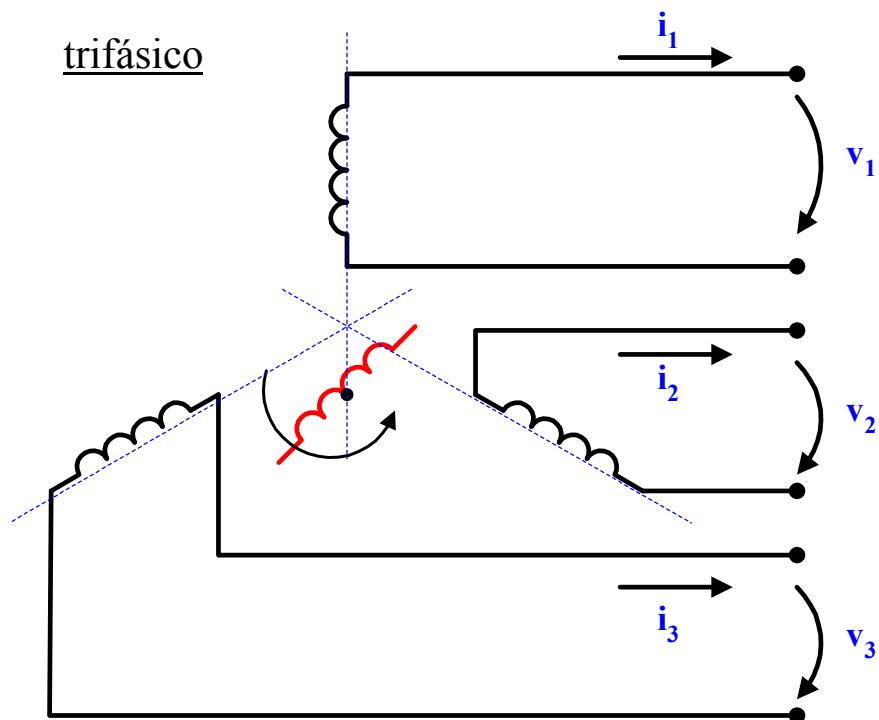
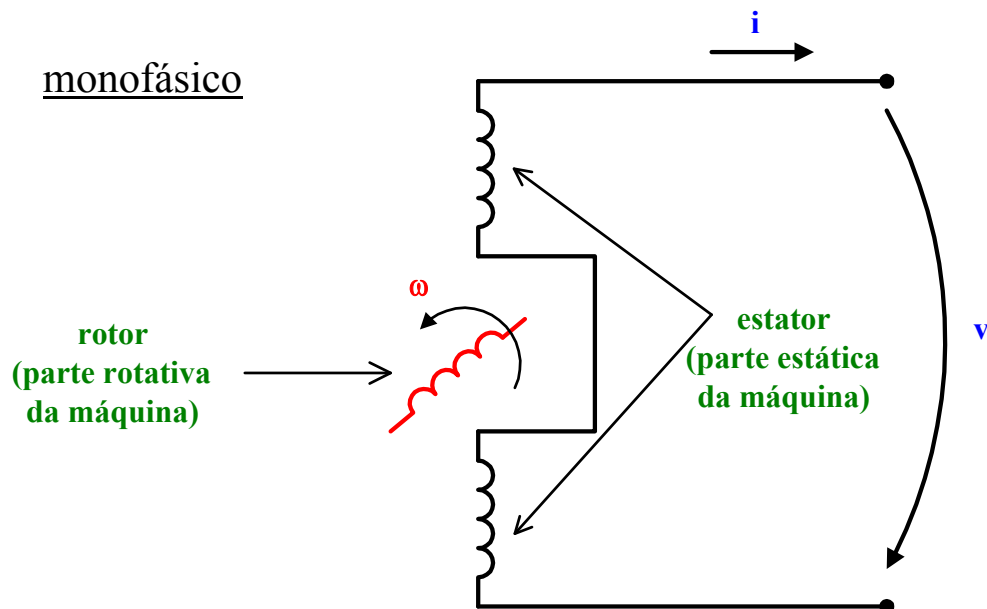
Note que esta questão é idêntica à que se fez em DC, quando se provou o Teorema da máxima transferência de potência.

- Procedendo do mesmo modo que para o Teorema da máxima transferência de potência em DC, pode-se provar que a potência transferida é máxima quando:

$$\bar{Z} = R_g - j X_g$$

SISTEMAS TRIFÁSICOS

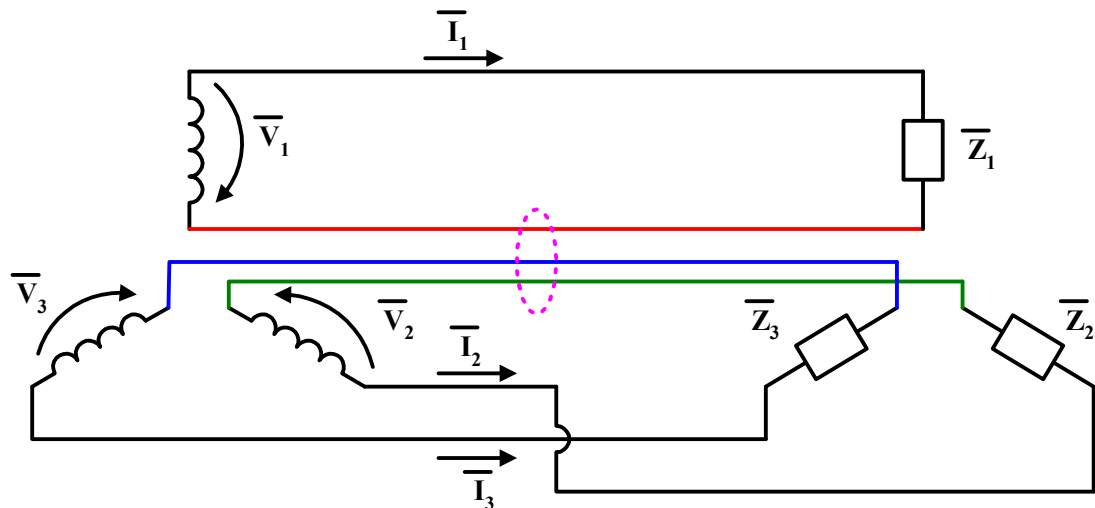
PRODUÇÃO DE CA SINUSOIDAL TRIFÁSICA (ALTERNADOR)



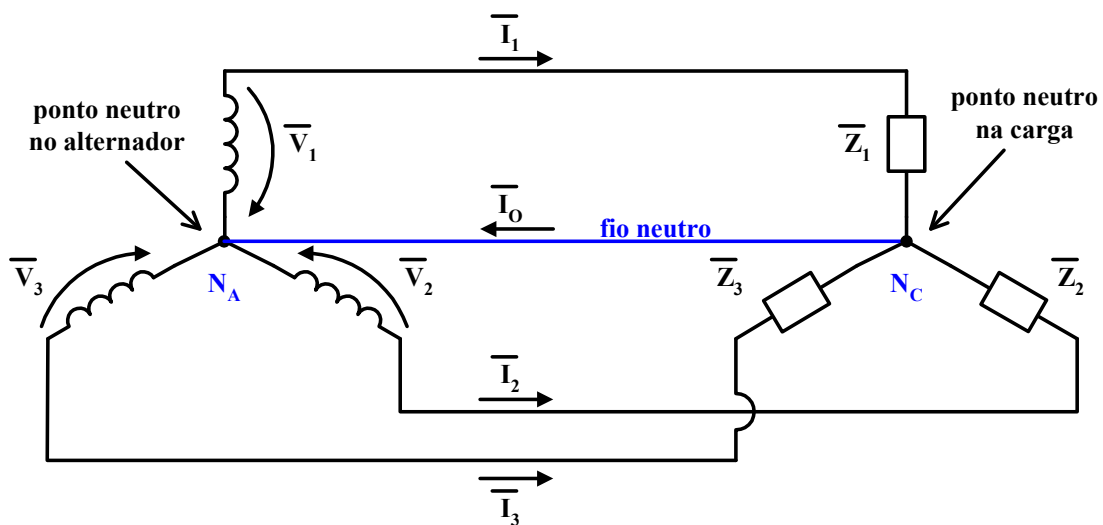
-
- 3 bobinas iguais, dispostas simetricamente e com eixos magnéticos fazendo entre si ângulos de 120° ;
 - as tensões desenvolvidas estão desfasadas entre si de 120° e têm igual amplitude.

LIGAÇÃO DO ALTERNADOR EM ESTRELA A UMA CARGA EM ESTRELA

Um alternador poderia ser usado para alimentar 3 cargas do seguinte modo:



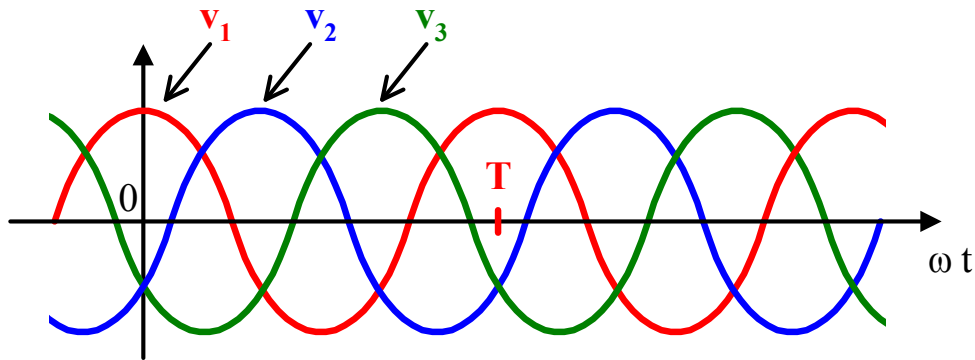
Pode, todavia, reduzir-se o nº de condutores necessários, estabelecendo um ponto comum às três fases, quer no alternador (N_A), quer na carga (N_C), que se designam por pontos neutros e que são interligados por um único condutor designado [fio neutro](#):



configuração em estrela com neutro

REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA E VECTORIAL DO SISTEMA DE TENSÕES TRIFÁSICAS

O sistema trifásico é descrito por três tensões, desfasadas entre si de 120° ($2\pi/3$ rad) e com amplitudes iguais:

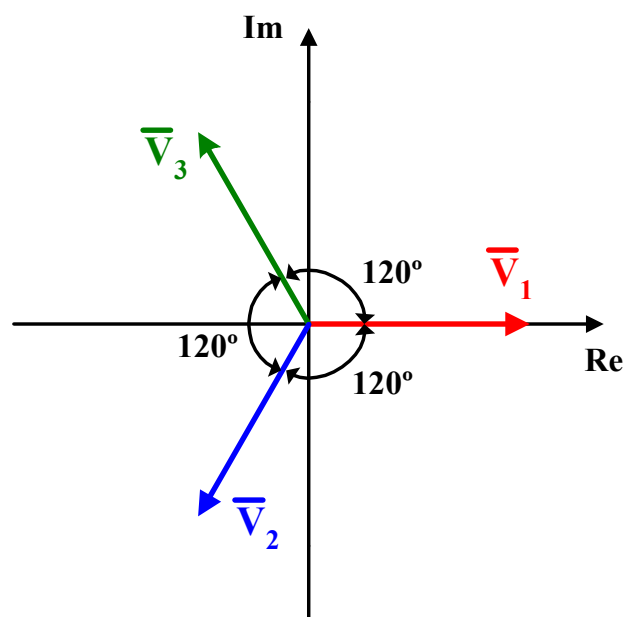


$$v_1 = V_{\text{ef}} \sqrt{2} \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{V}_1 = V_{\text{ef}} \sqrt{2}$$

$$v_2 = V_{\text{ef}} \sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ) \Rightarrow \bar{V}_2 = V_{\text{ef}} \sqrt{2} \angle -120^\circ$$

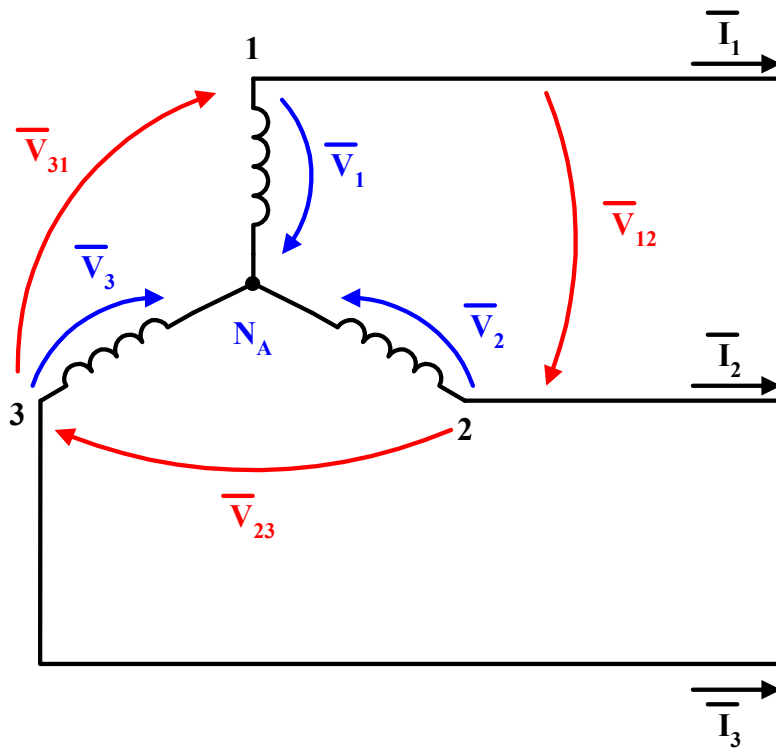
$$v_3 = V_{\text{ef}} \sqrt{2} \cos(\omega t - 240^\circ) \Rightarrow \bar{V}_3 = V_{\text{ef}} \sqrt{2} \angle -240^\circ$$

$$\text{OU } v_3 = V_{\text{ef}} \sqrt{2} \cos(\omega t + 120^\circ) \Rightarrow \bar{V}_3 = V_{\text{ef}} \sqrt{2} \angle 120^\circ$$



TENSÕES SIMPLES E TENSÕES COMPOSTAS

- ➡ **Tensões simples**: são as tensões entre cada um dos condutores de fase e o ponto neutro do sistema;
- ➡ **Tensões compostas**: são as tensões entre condutores de fase.



$\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$: **tensões simples**

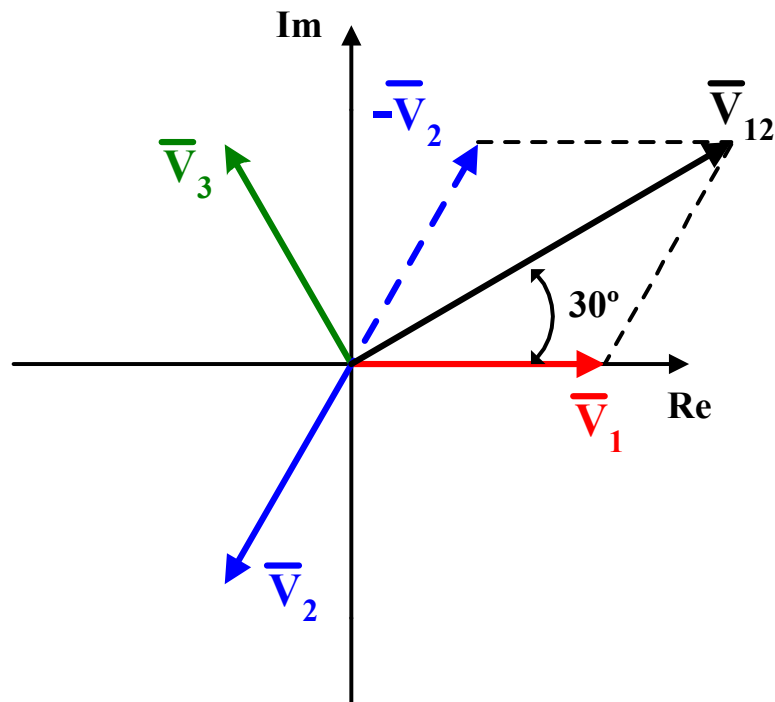
$\bar{V}_{12}$, $\bar{V}_{23}$, $\bar{V}_{31}$: **tensões compostas**

Relação entre tensões simples e tensões compostas

Aplicando a lei das malhas verifica-se que:

$$\bar{V}_{12} + \bar{V}_2 - \bar{V}_1 = 0 \Rightarrow \bar{V}_{12} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2$$

cuja representação é:



Da figura conclui-se que:

$$V_{12} = \sqrt{3} V_1$$

A amplitude da tensão composta é $\sqrt{3}$ vezes a amplitude da tensão simples

A tensão composta está em avanço de 30° em relação à tensão simples, i.e.:

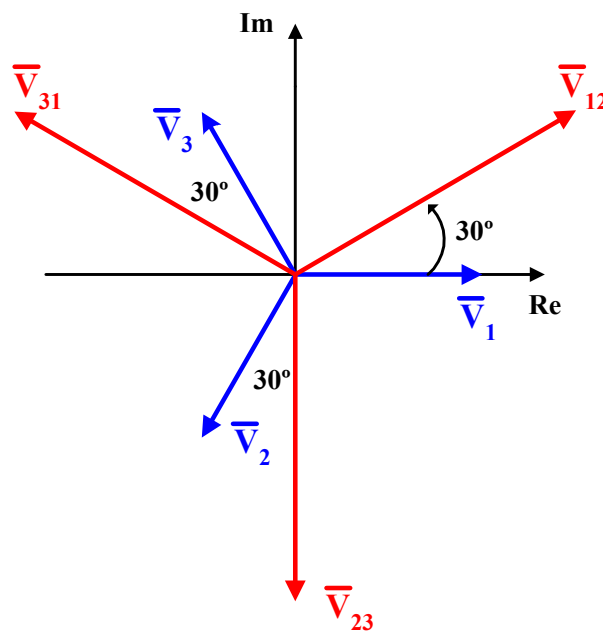
$$\bar{V}_{12} = \sqrt{3} \bar{V}_1 \angle 30^\circ$$

Passa-se o mesmo para as restantes tensões, pelo que se pode dizer, de um modo geral que:

→ as tensões compostas têm uma amplitude que é $\sqrt{3}$ vezes a amplitude das tensões simples:

$$V_C = \sqrt{3} V_S$$

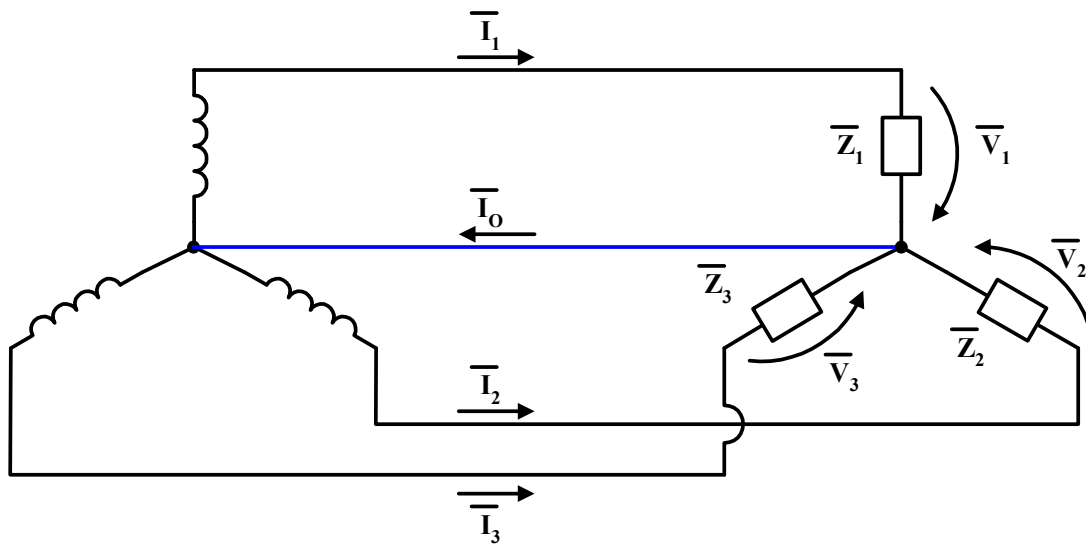
→ a estrela das tensões compostas está em avanço de 30° relativamente à estrela das tensões simples:



→ Quando se refere a tensão nominal de um sistema trifásico sem qualquer outra indicação, entende-se por convenção, que se trata do valor eficaz das suas tensões compostas.

LIGAÇÃO DA CARGA EM ESTRELA (Y) E EM TRIÂNGULO (Δ)

1) LIGAÇÃO DA CARGA EM ESTRELA COM (FIO) NEUTRO

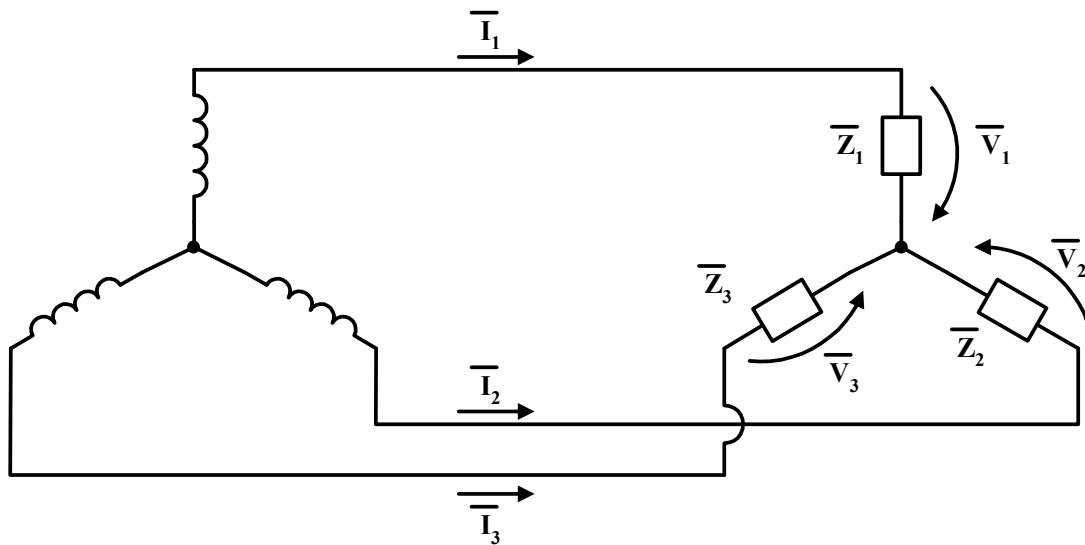


- A existência de fio neutro garante que as tensões na carga são impostas pelas correspondentes tensões nas fases do alternador, independentemente dos valores de $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ e $\bar{Z}_3$:
- Usando a lei dos nós:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

como $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ e $\bar{I}_3$ não estão em fase umas com as outras, vão originar uma corrente no neutro cuja amplitude (valor eficaz) é inferior à soma das amplitudes (valores eficazes) das correntes nas fases.

2) LIGAÇÃO DA CARGA EM ESTRELA SEM (FIO) NEUTRO



2.1) Estrela equilibrada

Se houver a garantia que a carga é equilibrada, i.e.:

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3$$

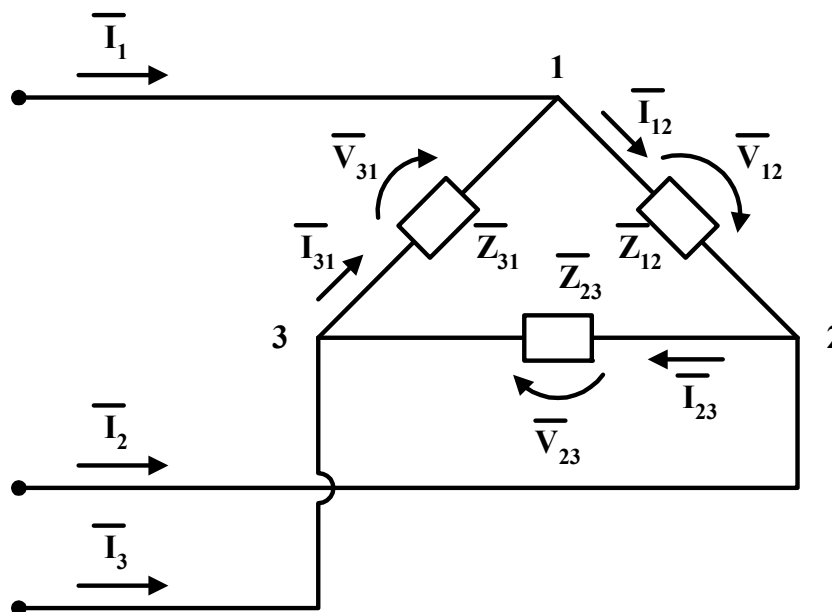
a soma vectorial das correntes $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ e $\bar{I}_3$ (e, portanto, a soma instantânea) é nula pelo que não haveria corrente no (fio) neutro (se existisse); **nestas circunstâncias, a omissão do (fio) neutro, não altera a situação 1).**

2.2) Estrela desequilibrada

- Nesta situação, e não existindo (fio) neutro, haverá modificações no funcionamento do sistema: há cargas com sobretensão e outras com tensão inferior ao normal.
- Quando a estrela das cargas está **desequilibrada**, é **indispensável a ligação do fio neutro**.

3) LIGAÇÃO DA CARGA EM TRIÂNGULO

Liga-se cada carga a um par de fases; cada carga fica submetida á tensão composta:



3.1) Triângulo equilibrado

Usando a Lei dos nós:

$$-\bar{I}_{12} + \bar{I}_1 + \bar{I}_{31} = 0 \Rightarrow \bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31}$$

passa-se o mesmo para as outras correntes:

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23}$$

Se a carga é equilibrada, i.e.:

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3$$

ao representar vectorialmente estas correntes (tal como se fez anteriormente para as tensões) pode-se concluir que:

→ a amplitude (valor eficaz) da corrente na linha I_L , ($\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ ou $\bar{I}_3$) é $\sqrt{3}$ vezes a amplitude (valor eficaz) da corrente nos lados do triângulo, I_Δ :

$$I_L = \sqrt{3} I_\Delta$$

→ a estrela das correntes na linha está em atraso de 30° relativamente à estrela das correntes nos lados do triângulo; por exemplo:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} \sqrt{3} \angle -30^\circ$$

3.1) Triângulo desequilibrado

A corrente em cada lado do triângulo é determinada de acordo com o valor da impedância:

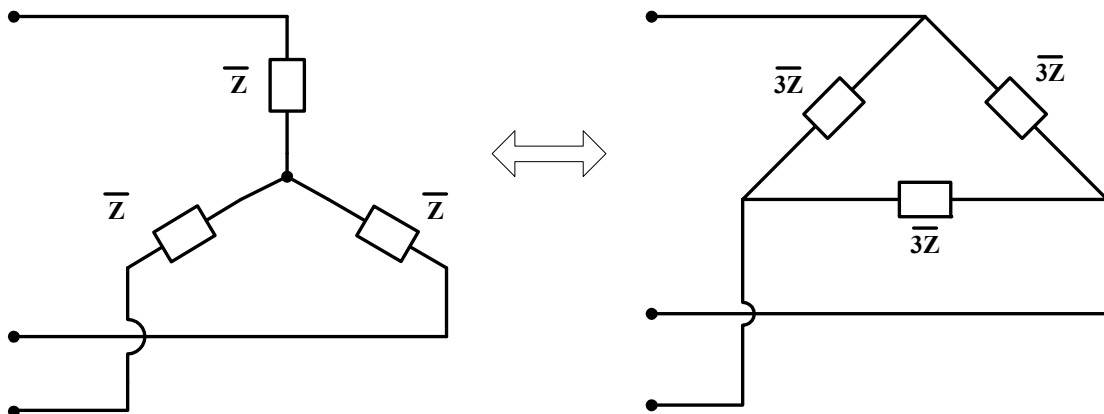
$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}}$$

$$\bar{I}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}}$$

$$\bar{I}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}}$$

EQUIVALÊNCIA ESTRELA-TRIÂNGULO

Para efeitos de cálculo, é possível substituir um triângulo equilibrado por uma estrela equilibrada e vice-versa, de acordo com a seguinte equivalência:



POTÊNCIA NOS SISTEMAS TRIFÁSICOS

CASO GERAL

Para ligação em estrela ou em triângulo, e para sistemas equilibrados ou não, as potências podem ser calculadas do seguinte modo:

➡ Potência activa na carga trifásica, P :

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

em que P_n é a potência activa no braço n da Y ou no lado n do Δ .

➡ Potência reactiva na carga trifásica, Q :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

em que Q_n é a potência activa no braço n da Y ou no lado n do Δ .

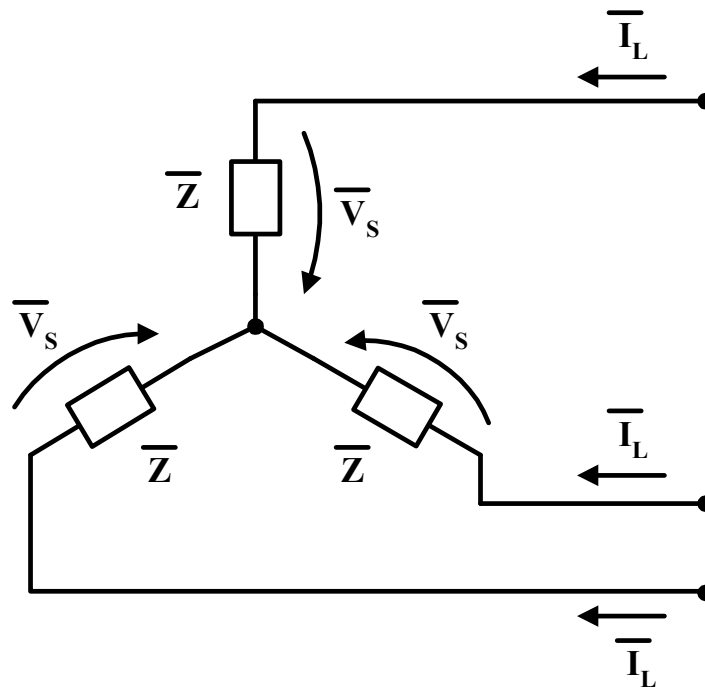
Note que Q_n pode ser positivo ou negativo.

➡ Potência aparente na carga trifásica, S :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

SISTEMAS EQUILIBRADOS

1) Estrela equilibrada com ou sem neutro



➔ Potência activa

É fácil concluir que:

$$P = 3 V_{S_{ef}} I_{L_{ef}} \cos \varphi_Y$$

como:

$$V_{S_{ef}} = \frac{V_{C_{ef}}}{\sqrt{3}}$$

é também:

$$P = \sqrt{3} V_{C_{ef}} I_{L_{ef}} \cos \varphi_Y$$

→ Potência reactiva

$$Q = 3 V_{S_{ef}} I_{L_{ef}} \sin \phi_Y$$

é também:

$$Q = \sqrt{3} V_{C_{ef}} I_{L_{ef}} \sin \phi_Y$$

em que:

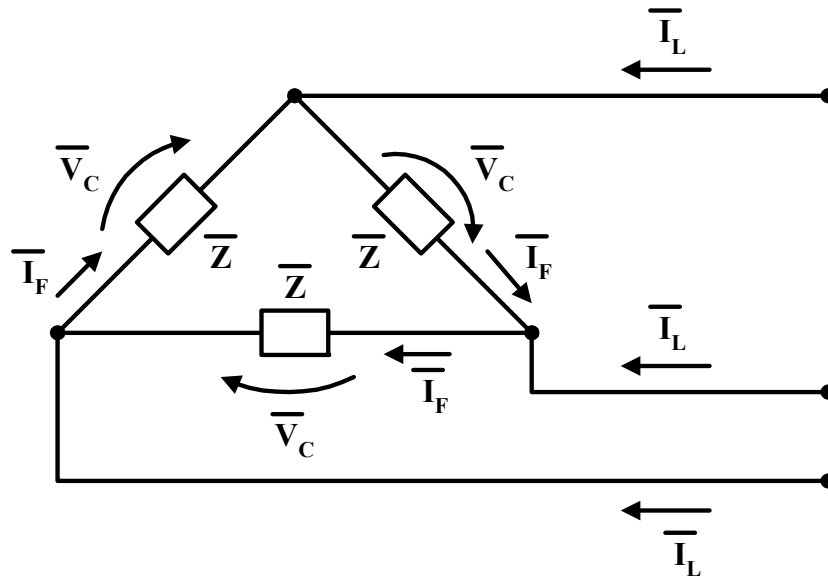
$V_{S_{ef}}$: tensão simples eficaz

$I_{L_{ef}}$: corrente na linha eficaz

ϕ_Y : desfasamento entre a tensão simples e a corrente na
linha

$V_{C_{ef}}$: tensão composta eficaz

2) Triângulo equilibrado



➔ Potência activa

É fácil concluir que:

$$P = 3 V_{C_{ef}} I_{F_{ef}} \cos \varphi_{\Delta}$$

como:

$$I_{F_{ef}} = \frac{I_{L_{ef}}}{\sqrt{3}}$$

é também:

$$P = \sqrt{3} V_{C_{ef}} I_{L_{ef}} \cos \varphi_{\Delta}$$

→ Potência reactiva

$$Q = 3 V_{C_{ef}} I_{F_{ef}} \sin \varphi_{\Delta}$$

é também:

$$Q = \sqrt{3} V_{C_{ef}} I_{L_{ef}} \sin \varphi_{\Delta}$$

em que:

$V_{C_{ef}}$: tensão composta eficaz

$I_{F_{ef}}$: corrente eficaz nos lados do triângulo

$I_{L_{ef}}$: corrente na linha eficaz

φ_{Δ} : desfasamento entre a tensão composta e a corrente no lado do triângulo

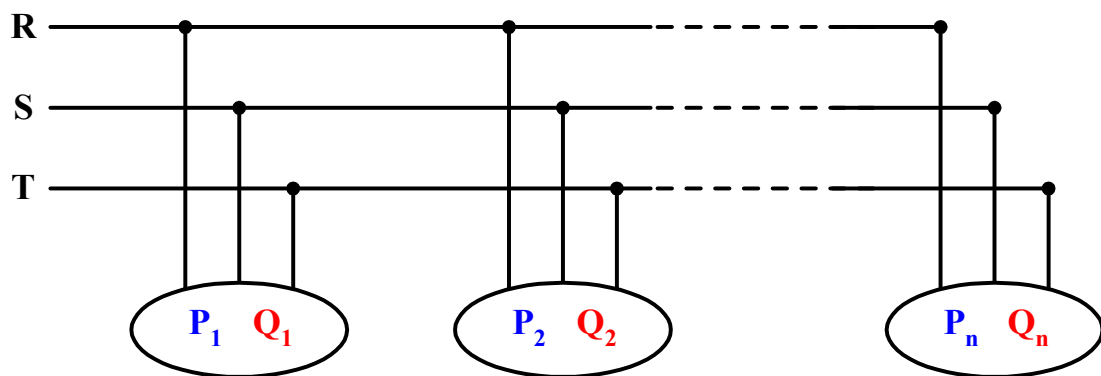
→ Potência aparente

Tanto para a estrela equilibrada como para o triângulo equilibrado, é sempre:

$$S = \sqrt{3} V_{C_{ef}} I_{L_{ef}}$$

MÉTODO DE BOUCHEROT PARA CÁLCULO DAS POTÊNCIAS (MÉTODO DA SOMA DAS POTÊNCIAS)

Este método baseia-se na possibilidade de somar algebricamente a potência activa e reactiva de um conjunto de cargas trifásicas ligadas em paralelo. Este método já foi exposto no sistema monofásico:



$$P_{\text{tot}} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$S_{\text{tot}} = \sqrt{P_{\text{tot}}^2 + Q_{\text{tot}}^2}$$

$$FP_{\text{circuito}} = \frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}}$$

COMPENSAÇÃO DO FACTOR DE POTÊNCIA NOS SISTEMAS TRIFÁSICOS

- ➡ É efectuada como nos sistemas monofásicos;
- ➡ o cálculo dos condensadores de compensação segue os mesmos princípios;
- ➡ os condensadores podem ser ligados em estrela ou em triângulo (mais comum).

Exercício A65

Considere dois motores trifásicos ligados à rede de alimentação trifásica de 400V, 50Hz. Cada motor absorve as seguintes potências médias com o FP indicado:

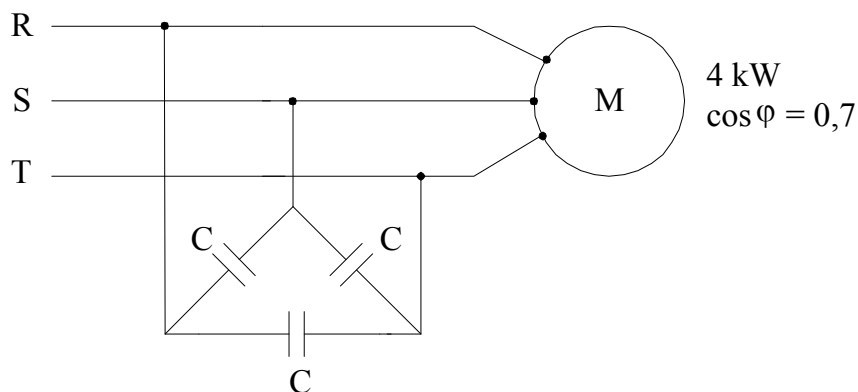
$$P_1=10\text{kW}, \text{FP}_1=0,8$$

$$P_2=4\text{kW}, \text{FP}_2=0,7$$

- Determine a corrente na linha de alimentação da instalação;
- determine o FP da instalação.

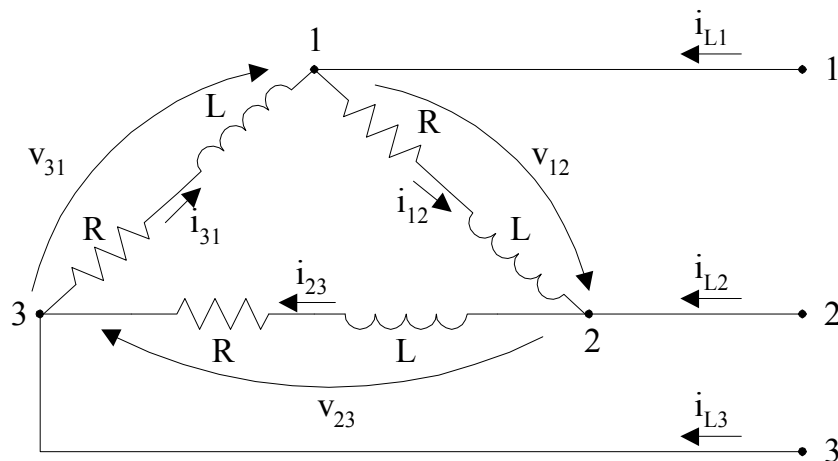
Exercício A66

Considere a figura seguinte. Determine o valor de C necessário para elevar o FP para 0,8 (400V, 50Hz).



Exercício A67

Considere a instalação trifásica representada na figura seguinte, em que o valor eficaz da tensão entre fases é de 400V, 50Hz, e $R=19,6\Omega$, $L=31,83\text{mH}$.



- Calcule os valores eficazes e defasagens das correntes nas fases do receptor e das correntes nas linhas.
- Determine as potências activa, reactiva e aparente postas em jogo pelo gerador.

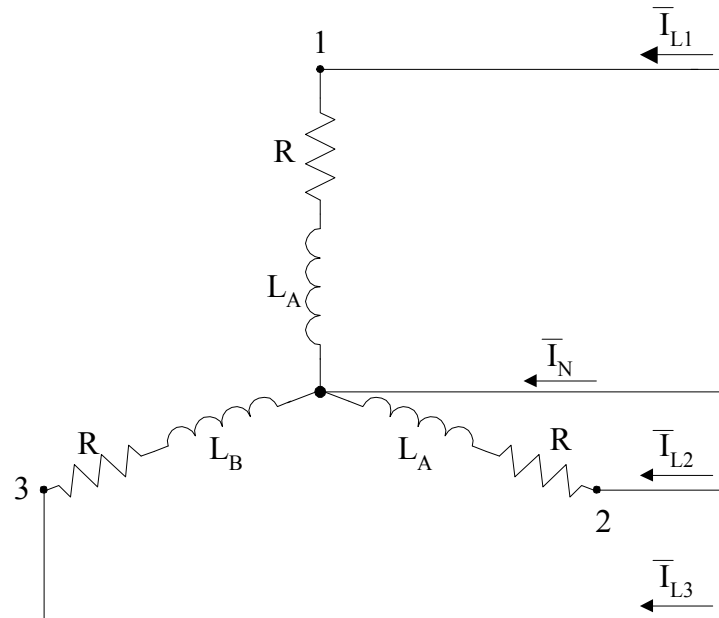
Exercício A68

Uma instalação industrial absorve uma corrente eficaz de 300A a uma tensão eficaz de 10KV e com factor de potência (FP) 0,8 indutivo. A linha que alimenta a instalação tem uma resistência de 1Ω e uma reactância indutiva de 2Ω .

- Calcule a tensão no início da linha (i.e., junto ao gerador de tensão).
- Calcule o FP do sistema linha-instalação.
- Efectue a compensação parcial do FP da instalação industrial de modo a apresentar um $FP=0,9$ indutivo.

Exercício A69

A carga trifásica da figura é alimentada pela rede de alimentação de 230/400V, 50Hz. Considere $R=20\Omega$, $L_A=10\text{mH}$, $L_B=20\text{mH}$.

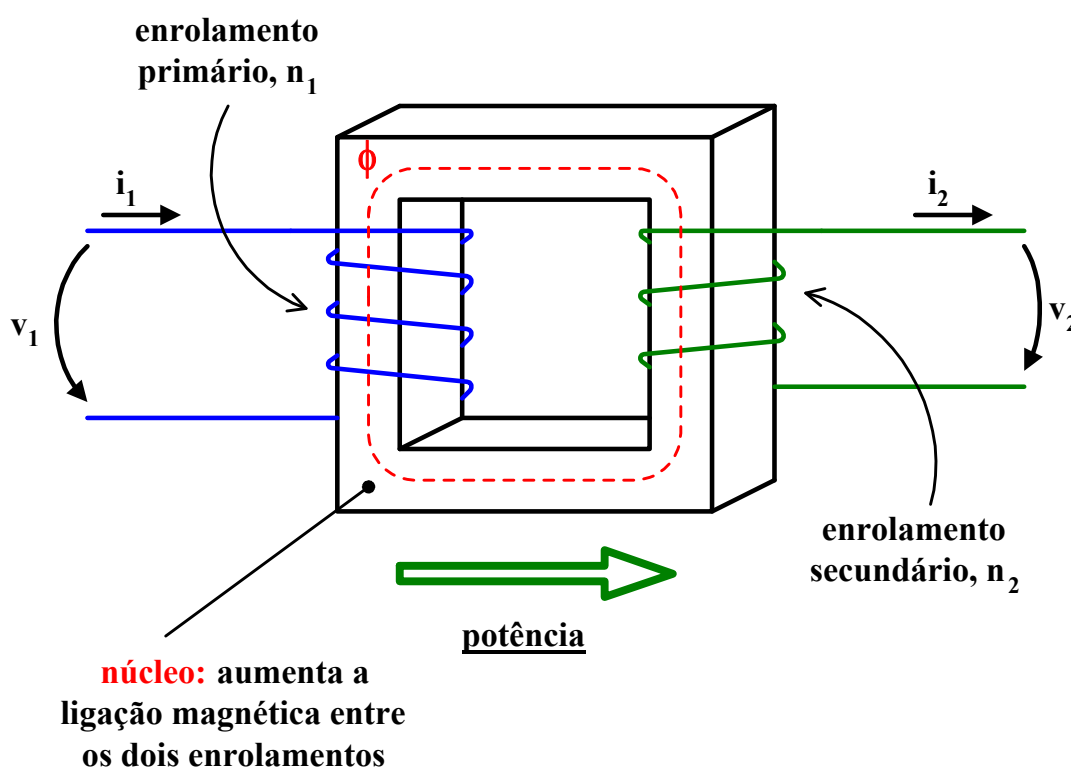


- Diga, justificando, se o sistema trifásico é equilibrado.
- Determine as amplitudes complexas da corrente em cada fase da carga e na linha, e da corrente no neutro (tenha em atenção os sentidos de referência indicados para as correntes).
- Determine a potência activa posta em jogo pela rede de alimentação.
- Admita agora que $R=20\Omega$ e $L_A=L_B=20\text{mH}$. Determine a corrente no neutro; justifique a sua resposta.

TRANSFORMADOR (IDEAL)

É um dispositivo eléctrico que consiste em pelo menos dois enrolamentos ligados magneticamente.

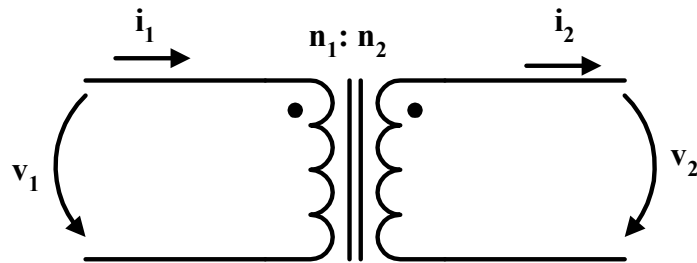
- transformador é uma máquina eléctrica [estática](#).



- Por convenção, designa-se por primário o circuito onde está inserido a fonte de tensão, e por secundário o circuito onde está inserida a carga.

RELAÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO

Símbolo eléctrico do TRF:



Para o TRF ideal, verificam-se as seguintes relações:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

(relação de transformação)

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

Destas relações, conclui-se que, no TRF ideal:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow v_1 i_1 = v_2 i_2 \Rightarrow p_1 = p_2$$

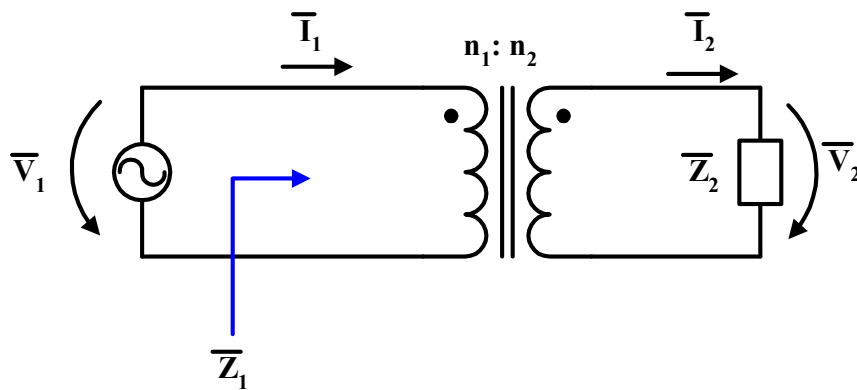
isto é, não há perdas

Note que:

- o enrolamento com maior n° de espiras é o que tem maior tensão;
- o enrolamento com maior n° de espiras é o que tem menor corrente.

TRANSFORMAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS

Considere o seguinte circuito:



Multiplicando as relações de transformação membro a membro, obtém-se:

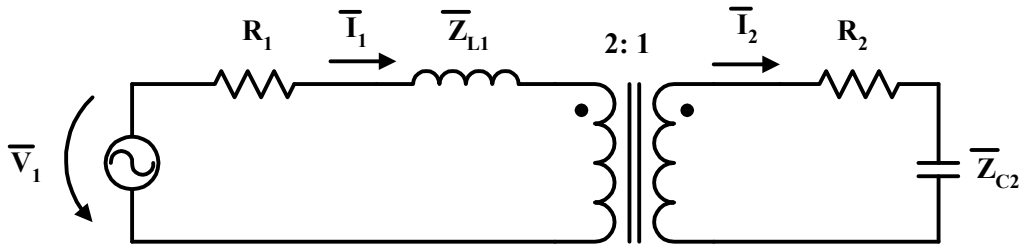
$$n_1^2 \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} n_2^2 \bar{I}_2 \Rightarrow \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} \frac{n_1^2}{n_2^2} \Rightarrow$$

$$\bar{Z}_1 = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \bar{Z}_2$$

isto é, a fonte do primário "vê" a impedância do secundário multiplicada pelo quadrado da relação de transformação.

Exercício A70

No circuito da figura, $v_1(t) = 30\sqrt{2} \cos(\omega t)$ [V], $R_1 = 20\Omega$, $Z_{L1}=20\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, e $Z_{C2} = 5\Omega$. Determine a corrente $i_2(t)$.



Exercício A71

Responda às seguintes questões:

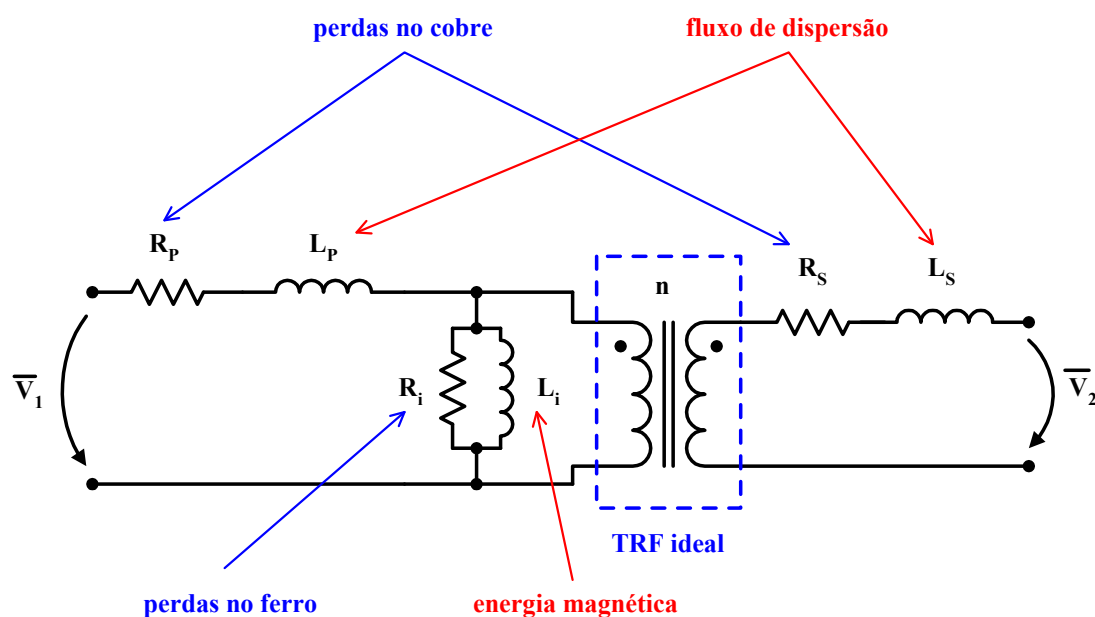
- Um TRF ideal não tem perdas. (Falso/Verdadeiro?)
- Os TRFs podem ser utilizados para modificar apenas tensões, apenas correntes, apenas impedâncias, ou todos os três?
- Se se desejar que uma determinada impedância colocada no secundário tenha um valor menor "vista" do primário, qual dos enrolamentos deverá ter mais espiras?
- O TRF pode ser utilizado para elevar ou reduzir tensões; para reduzir as perdas num sistema de transporte de energia eléctrica, o transformador deverá elevar ou reduzir a tensão?
- Se se desejar reduzir o valor de uma determinada tensão, qual é o condutor que deve ter maior secção? O condutor que constitui o enrolamento do primário ou do secundário?

TRANSFORMADOR REAL

O TRF real apresenta alguns efeitos que não estão presentes no modelo do TRF ideal; os mais importantes, são:

- perdas no ferro (do núcleo): estas perdas são devidas à histerese e às correntes de Foucault;
- perdas no cobre (enrolamentos): são as perdas na resistência associada aos condutores que constituem os enrolamentos do TRF;
- fluxo de dispersão: é a parte do fluxo magnético que não abraça os dois (ou mais, se houver) enrolamentos.

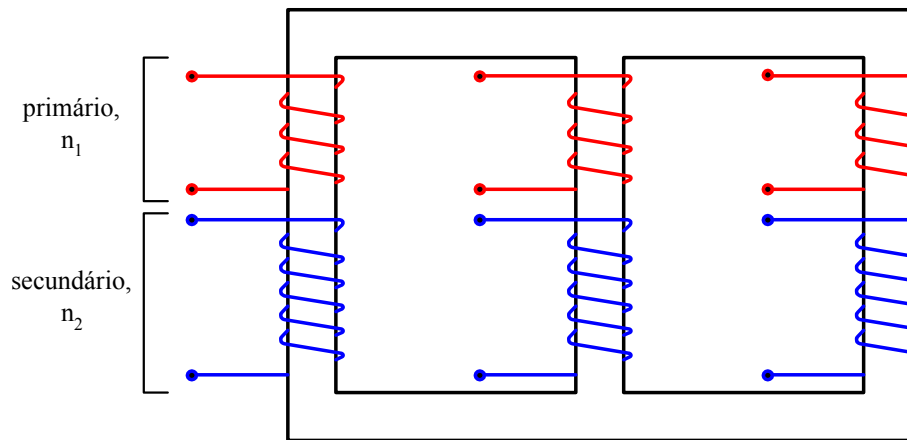
Para entrar em conta com estes efeitos, existem vários modelos para o TRF real; por exemplo:



POTÊNCIA APARENTE

- ➡ A potência de um transformador é especificada em volt-ampere e não em Watt, i.e., o que é especificado é a potência aparente e não a potência activa.
- ➡ Num TRF é indicada a potência aparente máxima com que pode trabalhar,
i.e.,
- ➡ dada uma tensão, é indicada a corrente máxima que pode percorrer os seus enrolamentos (e, portanto, a corrente máxima que o TRF pode fornecer à carga).
- ➡ Um TRF não pode ser especificado em função da potência activa, uma vez que, à partida, não se conhece o FP da carga que vai ser ligada ao TRF.

TRANSFORMADOR TRIFÁSICO



- ➔ No TRF trifásico, o primário/secundário pode ser ligado em estrela ou em triângulo, o que resulta em quatro combinações possíveis, cada uma com características próprias:

YY, YΔ, ΔΔ, ΔY

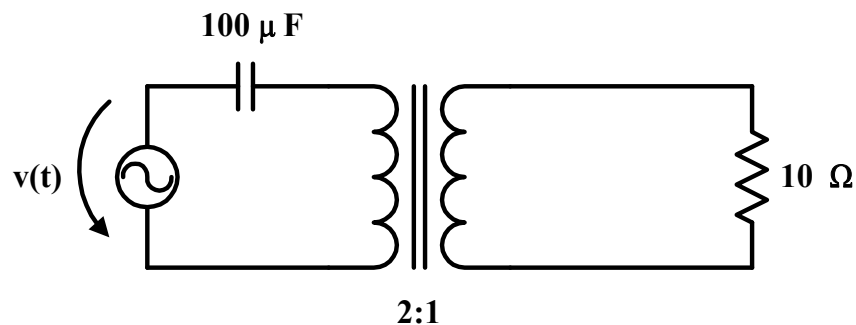
Para a ligação em triângulo é também utilizada por vezes, a letra maiúscula D:

YY, YD, DD, DY

- ➔ Os enrolamentos ligados em Y podem ou não ter o ponto neutro acessível.
- ➔ Existe ainda uma terceira montagem dos três enrolamentos no transformador, que é a montagem em zig-zag, denominada pela letra Z, o que possibilita outras combinações além das indicadas anteriormente; será analisada em outras disciplinas do Curso.

Exercício A72

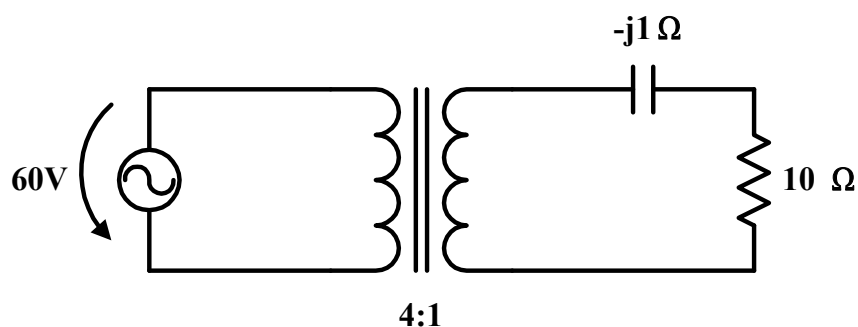
No circuito da figura, a fonte de alimentação tem valor eficaz de 120V, frequência 50Hz. Determine:



- a) a corrente no primário;
- b) a tensão na carga;
- c) a potência fornecida pela fonte de tensão.

Exercício A73

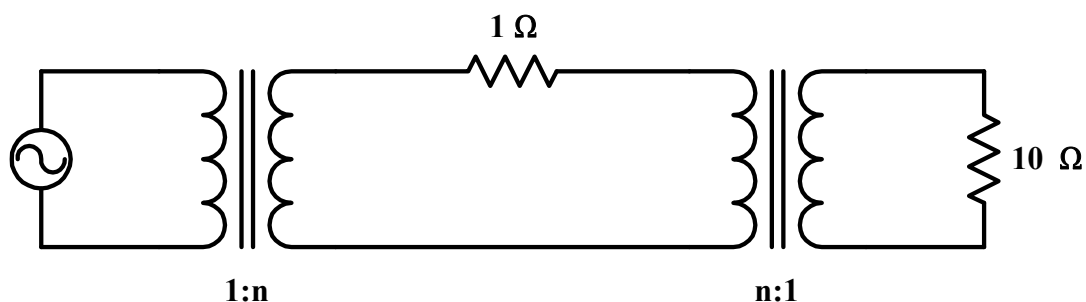
No circuito da figura determine:



- b) a tensão no secundário;
- a) a corrente no primário;
- a) a corrente no secundário;
- c) a potência fornecida pela fonte de tensão.

Exercício A74

O sistema de transmissão de energia da figura é constituído por um TRF elevador, uma linha de transporte de energia com resistência de 1Ω , e um TRF redutor ao qual está ligada uma carga de 10Ω . Determine o valor de n para que o rendimento do sistema seja de 99,5%.



EFEITOS FISIOLÓGICOS DA CORRENTE ELÉCTRICA

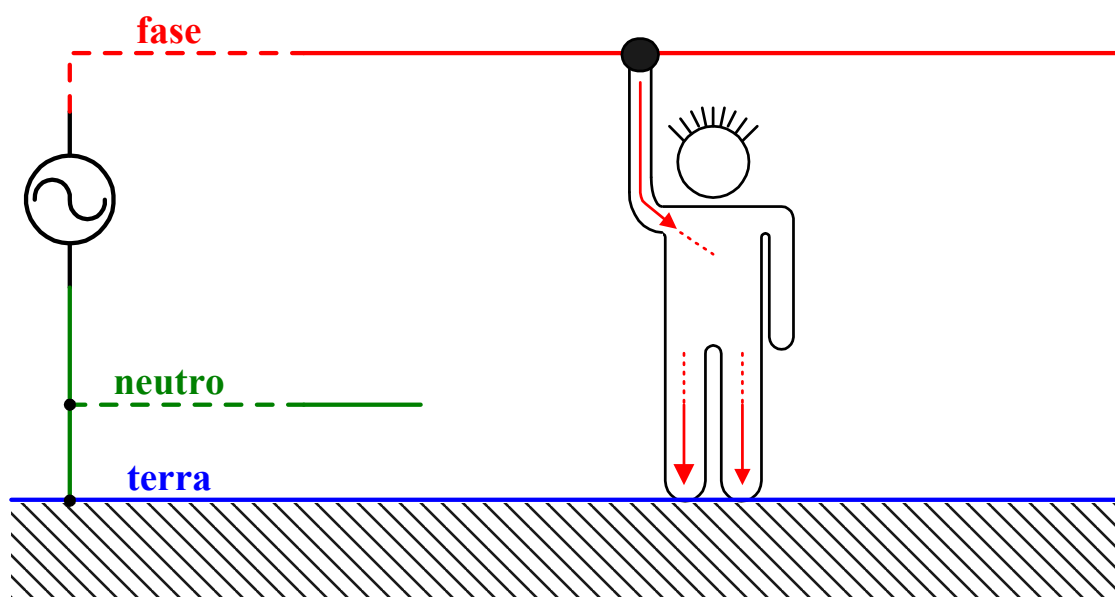
É a corrente eléctrica (e não a tensão) que tem efeitos sobre o corpo humano; essa corrente depende da tensão e da resistência do corpo humano:

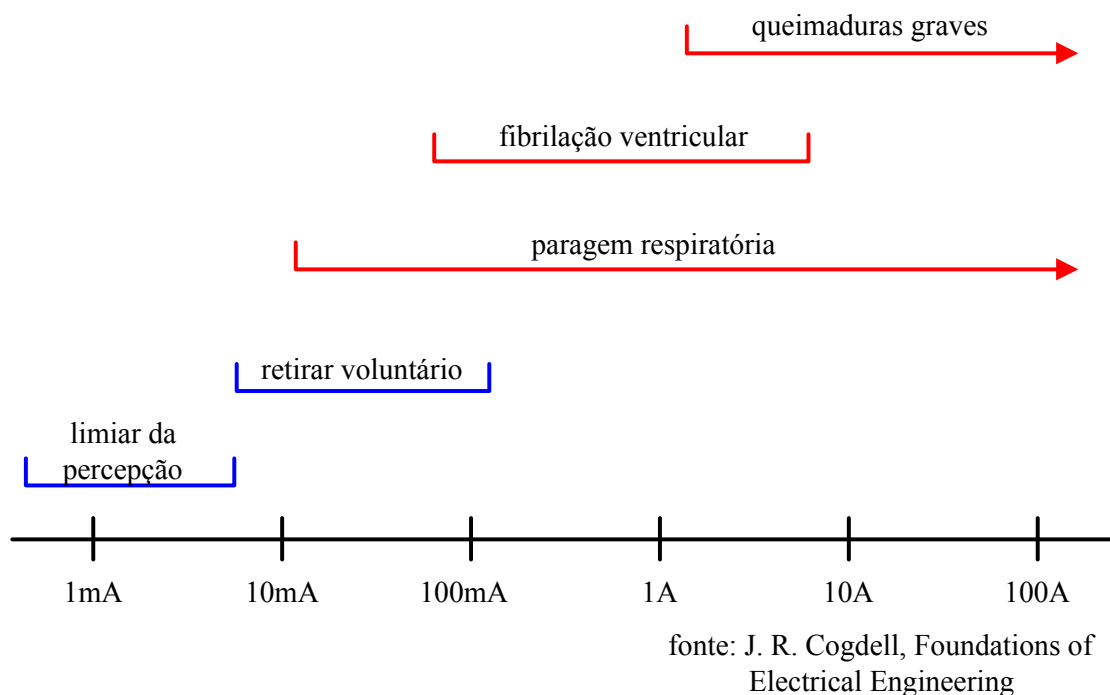
$$I_{\text{corpo}} = \frac{V}{R_{\text{corpo}}}$$

- Qual o valor da corrente que provoca efeitos no corpo humano?
- E qual o valor da tensão que provoca essa corrente?
- Que efeitos fisiológicos são?
- Quais os danos causados no corpo humano?

O CHOQUE ELÉCTRICO

Os choques eléctricos ocorrem, na sua maioria, quando partes do corpo humano têm contacto com a fase e o neutro ou com a fase e a terra.





Limiar da percepção: variável de indivíduo para indivíduo, podendo, ser inferior a 1mA para alguns indivíduos, e chegar a 8 ou 9mA para outros.

Retirar voluntário: para estes valores de corrente, o indivíduo consegue retirar voluntariamente o contacto com os elementos que dão origem ao choque eléctrico; para valores superiores de corrente, os nervos e os músculos são vigorosamente estimulados e dão origem a contracções involuntárias, podendo impossibilitar o afastamento voluntário da origem do choque eléctrico (valor mínimo $\approx 6\text{mA}$).

Paragem respiratória: para estes valores de corrente, ocorre a contracção violenta (involuntária) dos músculos respiratórios, resultando na asfixia e, se a corrente não for rapidamente interrompida, na morte do indivíduo (valor mínimo $\approx 18\text{mA}$).

Fibrilação ventricular: é um ritmo cardíaco rápido e desorganizado que pode aumentar até 300 batimentos/minuto; a morte ocorre em poucos minutos. É possível interromper a fibrilação ventricular se a passagem da corrente eléctrica tiver duração inferior a 150 ms; caso contrário, a fibrilação não cessa, mesmo quando se interrompe a corrente eléctrica. É necessário uma intervenção rápida para que o indivíduo sobreviva: a respiração artificial, a massagem cardíaca, a desfibrilação, podem salvar o indivíduo. Quando são iniciadas até cerca de 60s após o acidente possibilitam cerca de 95% de hipóteses de recuperação, mas descem para 1% se a intervenção for iniciada apenas ao fim de seis minutos.

➡ Os efeitos da corrente eléctrica dependem de vários factores: dimensão do corpo do indivíduo, condição física, trajecto da corrente eléctrica no corpo, resistência do contacto, resistência do corpo humano, tipo de corrente, duração da passagem da corrente, humidade ambiente, etc..

➡ Em disciplinas mais avançadas do Curso serão estudados métodos e equipamentos de protecção.

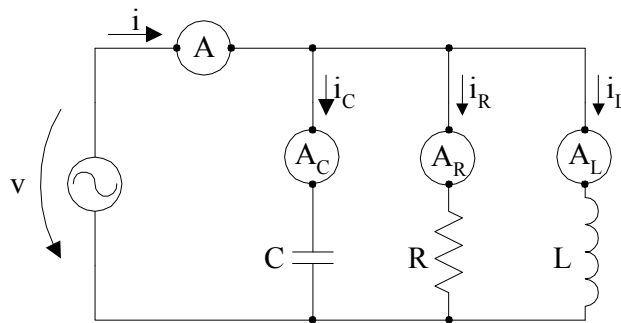
PROBLEMAS ADICIONAIS

ELECTROMAGNETISMO

PROBLEMA 1

Considere o circuito da figura. Os amperímetros representados reagem ao valor eficaz da corrente.

Admita que $v(t) = 220\sqrt{2} \cos \omega t$ [V], $f=50\text{Hz}$, $R=220\Omega$, $L=0,7\text{H}$, $C=14,46\mu\text{F}$.



PARTE I

- Determine as amplitudes complexas das correntes assinaladas no circuito; trace o correspondente diagrama vectorial das tensões e das correntes.
- Escreva as expressões instantâneas das correntes e determine os valores indicados pelos amperímetros.
- Determine a potência instantânea posta em jogo pelo gerador.
- Calcule as potências activa, reactiva e aparente postas em jogo pelo gerador; desenhe o triângulo das potências.
- Determine o Factor de potência; diga qual o seu significado.

PARTE II

- Suponha que a frequência duplica. Repita as alíneas da parte I.
- Compare os valores obtidos com os da parte I.

Soluções:

PARTE I:

$$(a) \bar{I}_C = j\sqrt{2} = \sqrt{2} \angle 90^\circ \text{ A} ; \bar{I}_R = \sqrt{2} = \sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ A} ; \bar{I}_L = -j\sqrt{2} = \sqrt{2} \angle -90^\circ \text{ A} ;$$

$$\bar{I} = \bar{I}_R = \sqrt{2} \text{ A}$$

- (b) todos os amperímetros medem uma corrente eficaz de 1A (repare que o amperímetro A não acusa uma leitura igual à soma das leituras dos restantes amperímetros).

(c) $p(t) = 220 + 220 \cos 2\omega t$ [W]. (d) $P=220W$; $Q=0$; $S=220VA$. (e) $FP=\cos\varphi=1$

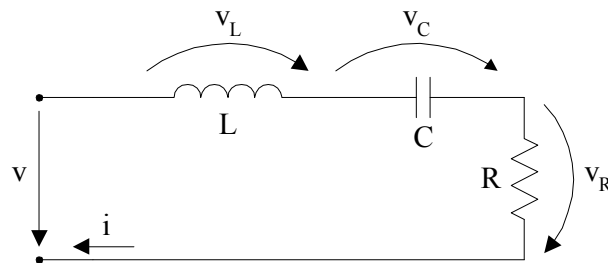
PARTE II:

$$(a) \bar{I}_C = 2j\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \angle 90^\circ A ; \bar{I}_R = \sqrt{2} = \sqrt{2} \angle 0^\circ A ; \bar{I}_L = -j\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -90^\circ A ;$$

$$\bar{I} = 1,8\sqrt{2} \angle 56,3^\circ A$$

PROBLEMA 2

Considere o circuito RLC série da figura. A tensão de entrada é constituída por duas componentes de amplitudes e frequências diferentes, conforme mostra a expressão seguinte: $v(t) = 220\sqrt{2} \cos(\omega t) + 10\sqrt{2} \cos(20\omega t)$ [V]. Admita $f=50\text{Hz}$, $L=15,9\text{mH}$, $R=10\Omega$, $C=1,59\mu\text{F}$.



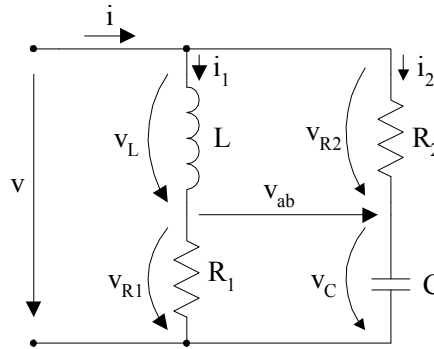
Relativamente a cada uma das componentes que compõem a tensão de entrada, determine:

- a impedância observada aos terminais de entrada do circuito;
- as tensões $v_L(t)$, $v_C(t)$, $v_R(t)$ e a corrente $i(t)$;
- o Factor de potência do circuito.
- o Factor de qualidade do circuito.

Notas: a impedância observada pela componente de 50Hz é $\bar{Z}_{50\text{Hz}} = 1995 e^{-j\frac{\pi}{2}} \Omega$; a essa frequência e admitindo que a componente de 50Hz da tensão de entrada tem fase na origem nula, as amplitudes complexas de algumas tensões e correntes são: $\bar{I}_{50\text{Hz}} \cong 0,11\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{2}} A$;
 $\bar{V}_{C50\text{Hz}} \cong 220\sqrt{2} V$; $\bar{V}_{R50\text{Hz}} \cong 1,1\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{2}} V$.

PROBLEMA 3

No circuito da figura seguinte admita que $V_{ef}=200V$, $f=50\text{Hz}$, $R_1=86,6\Omega$, $R_2=25,9\Omega$, $L=159\text{mH}$, $C=32,9\mu\text{F}$.



- Determine no domínio do tempo as correntes marcadas no circuito.
- Determine no domínio do tempo as tensões marcadas no circuito.
- Represente o diagrama vectorial das correntes.
- O circuito tem carácter capacitivo, resistivo ou indutivo? Justifique a sua resposta.
- Determine as potências activa, reactiva e aparente postas em jogo pelo fonte de alimentação; determine o factor de potência.

soluções:

- (a) $i(t)=3,54 \cos (\omega t+22^{\circ})$ [A] ; $i_1(t)=2,83 \cos (\omega t-30^{\circ})$ [A] ; $i_2(t)=2,83 \cos (\omega t+75^{\circ})$ [A].
 (b) $v_L(t)=141,4 \cos (\omega t+60^{\circ})$ [V] ; $v_{R1}(t)=244,9 \cos (\omega t-30^{\circ})$ [V] ; $v_{R2}(t)=73,3 \cos (\omega t+75^{\circ})$ [V] ;
 $v_C(t)=273,2 \cos (\omega t-15^{\circ})$ [V] ; $v_{ab}(t)=73,3 \cos (\omega t-135^{\circ})$ [V]. (d) capacitivo. (e) $P=464W$,
 $Q=-187,3VAr$, $S=500VA$, $FP=0,93$ (capacitivo).

PROBLEMA 4

Uma instalação industrial absorve uma corrente eficaz de 300A a uma tensão eficaz de 10KV e com factor de potência (FP) 0,8 indutivo. A linha que alimenta a instalação tem uma resistência de 1Ω e uma reactância indutiva de 2Ω .

- Calcule a tensão no início da linha (i.e., junto ao gerador de tensão).
- Calcule o FP do sistema linha-instalação.
- Efectue a compensação parcial do FP da instalação industrial de modo a apresentar um $FP=0,9$ indutivo.

soluções:

- (a) $V_{ef} \approx 10,6KV$; (b) $FP_{(linha+instalação)}=0,78$; (c) $C=20,6\mu F$.

PROBLEMA 5

Um fogão eléctrico trifásico está ligado em estrela e é alimentado pela tensão de 220/380V, $f=50Hz$. Tem as seguintes potências máximas por fase:

fase 1: um forno de 2,5KW

fase 2: uma placa eléctrica de 1KW e outra de 1,5KW

fase 3: uma placa eléctrica de 2KW.

Considere que o fogão está a funcionar à potência máxima.

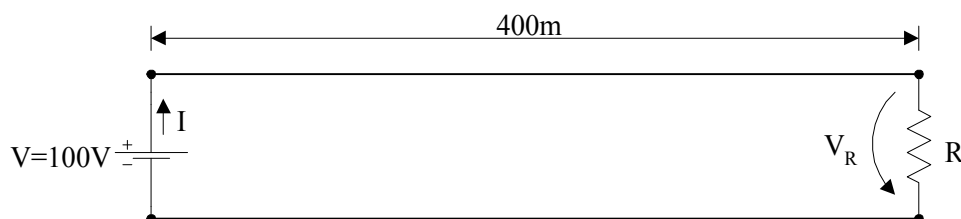
- Determine a corrente em cada carga e a corrente na linha, indicando as respectivas defasagens.
- Determine a corrente no neutro.
- Represente o diagrama vectorial das tensões simples e das correntes.
- Determine a corrente em cada fase do fogão e no neutro quando apenas funcionam o forno e a placa de 2KW.

Soluções:

(a) Admitindo a tensão simples da fase 1 com fase na origem nula, tem-se: $\bar{I}_1 = 11,36\sqrt{2} A$; $\bar{I}_2 = 11,36\sqrt{2} e^{-j120^\circ} A$; $\bar{I}_3 = 9,09\sqrt{2} e^{-j240^\circ} A$. (b) $\bar{I}_N = 2,2\sqrt{2} e^{-j59,7^\circ} A$ (repare que a corrente no neutro é muito menor que qualquer das correntes na linha). (d) $\bar{I}_1 = 11,4\sqrt{2} A$; $\bar{I}_2 = 0 A$; $\bar{I}_3 = 9,1\sqrt{2} e^{-j240^\circ} A$; $\bar{I}_N = 10,4\sqrt{2} e^{j49^\circ} A$.

PROBLEMA 6

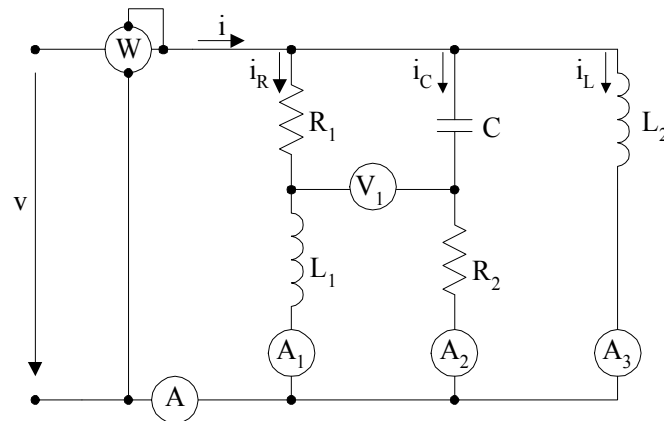
Considere a figura seguinte que representa uma carga R ligada a uma fonte de tensão contínua de 100V através de dois condutores de cobre. A carga e a fonte estão distanciadas de 400m. A carga R não varia com a temperatura. Os condutores utilizados têm secção circular e um diâmetro de 2mm. A condutividade do cobre a 20°C é de $5,8 \cdot 10^5 \text{ S.cm}^{-1}$ e o coeficiente de temperatura (de resistência) a 0°C é de $4,27 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.



- Sabendo que a temperatura dos condutores é de 20°C e que a corrente fornecida pela fonte é de 10A, determine o valor de R.
- Admita que a temperatura do condutor sobe para 40°C; nestas condições, determine a tensão V_R .

PROBLEMA 7

O circuito eléctrico representado na figura é alimentado pela tensão da rede de 230V, 50Hz. Os aparelhos de medida reagem ao valor eficaz das grandezas. Admita que : $R_1=100\Omega$, $L_1=50\text{mH}$, $C=80\mu\text{F}$, $R_2=50\Omega$ e $L_2=100\text{mH}$.



- Determine as amplitudes complexas das correntes i_R , i_C , i_L e i ; trace o diagrama vectorial da tensão e das correntes.
- Escreva as expressões instantâneas das grandezas calculadas na alínea anterior.
- Determine o valor indicado pelos amperímetros, pelo voltímetro V_1 e pelo wattímetro, justificando.
- Calcule o factor de potência circuito tem comportamento resistivo, capacitivo ou indutivo? Justifique a sua resposta.

PROBLEMA 8

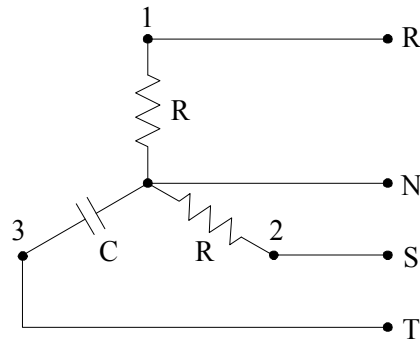
Uma instalação trifásica alimentada pela rede de 230/400V, 50Hz, tem a seguinte distribuição de cargas:

- um motor trifásico de 7kW com um factor de potência de 0,6;
- um motor trifásico de 3kW com um factor de potência de 0,7;
- 30 lâmpadas de incandescência de 100W cada, igualmente distribuídas pelas 3 fases.

- Determine a corrente na linha quando funcionam apenas os dois motores.
- Determine a corrente na linha quando todas as cargas estão em funcionamento.
- Diga qual o significado de factor de potência e determine o factor de potência da instalação.
- Efectue a compensação do factor de potência de modo a que a instalação apresente um factor de potência de 0,85. Represente o esquema eléctrico da instalação e do circuito que permite efectuar a compensação.

PROBLEMA 9

Considere a instalação trifásica representada na figura, ligada à rede de 230/400V, 50Hz, constituída por duas lâmpadas iguais de 230V/60W com resistência R e por um condensador cuja reactância capacitiva é igual a R .



- Determine a corrente em cada carga e na linha, indicando as respectivas defasagens.
- Diga justificando, se, para esta carga, há necessidade de ligar o fio neutro.
- Determine a corrente no neutro e a sua defasagem em relação à tensão composta v_{23} .
- Represente o diagrama vectorial das tensões e das correntes.
- Admita que a lâmpada da fase 1(R) se funde e que há interrupção do fio neutro. Nestas condições, determine a tensão eficaz a que fica submetida a lâmpada da fase 2(S).

PROBLEMA 10

Um electroímã tem uma bobina constituída por fio de cobre que apresenta uma resistência de 30Ω a 20°C . Sabendo que o coeficiente de temperatura (de resistência) a 0°C é de $4,27 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, determine a resistência da bobina a 80°C .

PROBLEMA 11

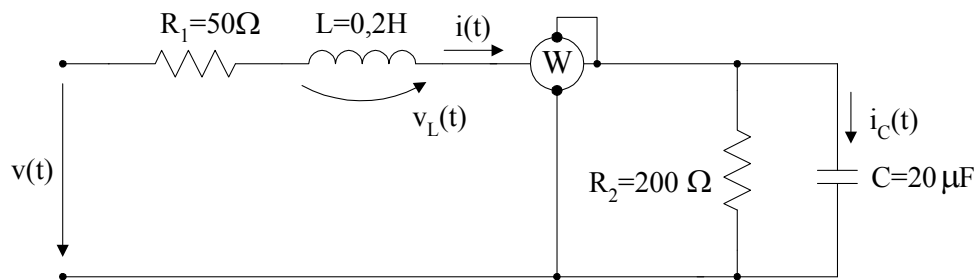
Determine o modelo de uma bateria de automóvel que apresenta as seguintes características:

- quando alimenta apenas as duas lâmpadas dos máximos do automóvel, cada uma de 65W, apresenta uma tensão de 11,5V;
- quando se alimenta o motor de arranque, que absorve uma corrente de 30A, apresenta uma tensão de 10V.

Obtenha a característica externa da bateria e represente-a graficamente.

PROBLEMA 12

Considere o circuito da figura, alimentado por uma fonte de tensão $v(t) = 110\sqrt{2} \sin(100\pi t + 70^\circ)$ [V].



- Determine as tensões e correntes marcadas no circuito (Note que as grandezas pedidas estão no domínio do tempo).
- Diga, justificando, se o circuito tem comportamento resistivo, capacitivo ou indutivo; represente um esquema equivalente série (com apenas dois elementos) do circuito da figura.
- Determine, justificando, o valor indicado pelo wattímetro.
- Determine o factor de potência e diga qual o seu significado.
- Prove que a frequência de ressonância do circuito é dada pela seguinte expressão:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R_2^2 C^2}}$$

PROBLEMA 13

Uma instalação trifásica alimentada pela rede de 230/400V, 50Hz, tem a seguinte distribuição de cargas:

- uma resistência de aquecimento de 1500W em cada fase;
- um motor trifásico de 6kW com um factor de potência de 0,6.

- Determine a corrente na linha.
- Determine o factor de potência da instalação.
- Efectue a compensação do factor de potência de modo a que a instalação apresente um factor de potência de 0,9.

PROBLEMA 14

Uma bobina de forma cilíndrica é constituída por 600 espiras de fio de cobre de secção circular. O fio utilizado tem um diâmetro de 0,28mm e o raio médio da bobina é de 6cm. A condutividade do cobre a **20°C** é de $5,8 \cdot 10^5 \text{ S.cm}^{-1}$ e o **coeficiente de temperatura (de resistência) a 0°C** é de $4,27 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

- a) Diga o que entende por coeficiente de temperatura (de resistência) à temperatura T_1 de um condutor metálico.
- b) Determine a resistência da bobina a 20°C.
- c) Determine a resistência da bobina à temperatura de 70°C. Qual o aumento percentual na resistência quando a temperatura aumenta de 20°C para 70°C?

Para mais exercícios (resolvidos e propostos) consulte alguns dos livros da bibliografia, existentes na biblioteca do IPT, nomeadamente:

Foundations of Electrical Engineering

J. R. Cogdell

Prentice Hall

ISBN 0-13-329525-7

Biblioteca IPT nº de registo 14757 (proibida requisição domiciliária)

Electrical Circuit Theory and Technology

J. O. Bird

Newnes

ISBN 0-7506-3552-5

Biblioteca IPT nº de registo 20043

Circuitos Eléctricos (livro de exercícios)

Joseph A. Edminister

Schaum McGraw-Hill

Biblioteca IPT nº de registo 14702